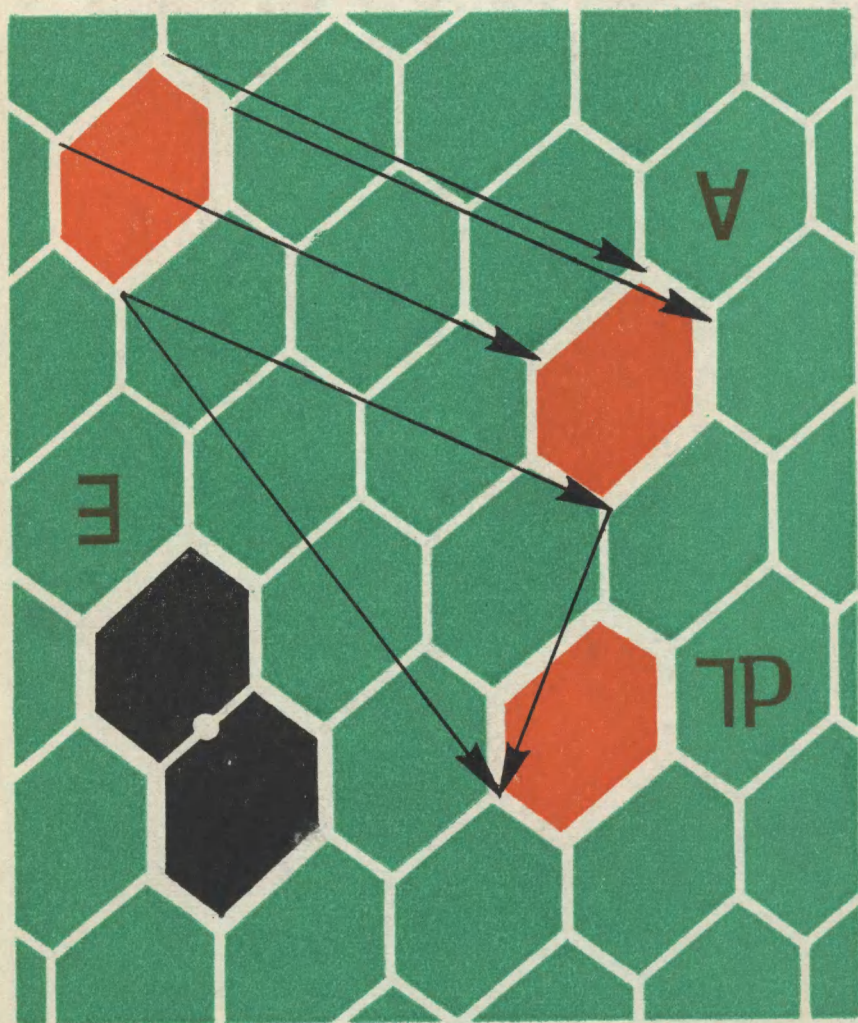


В.Г.БОЛТЯНСКИЙ, М.Б.ВОЛОВИЧ, А.Д.СЕМУШИН

ГЕОМЕТРИЯ 6-8



В.Г.БОЛТЯНСКИЙ, М.Б.ВОЛОВИЧ, А.Д.СЕМУШИН

ГЕОМЕТРИЯ

Пробный учебник

для 6—8 КЛАССОВ

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1979

*Рекомендовано к изданию Главным управлением школ
Министерства просвещения СССР*

Главы I—III (пункты 1—29) изучаются в VI классе,
IV—VII (пункты 30—67) — в VII классе,
VIII—X (пункты 68—89) — в VIII классе.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дорогие шестиклассники!

Уже пять лет вы изучаете в школе математику. С этого года у вас будут два различных математических предмета: *геометрия* и *алгебра*. Геометрия изучает предметы окружающего мира с точки зрения их размеров, формы и взаимного расположения, — отвлекаясь от их цвета, температуры, полезности и других «негеометрических» свойств.

Некоторые первоначальные сведения, относящиеся к геометрии, вы уже имеете. Например, вам знакомы различные геометрические фигуры: треугольник, круг, прямая линия, угол и другие. Вы можете измерить длину отрезка и величину угла, знаете, что во всяком треугольнике сумма величин углов равна 180° , умеете строить параллельные и перпендикулярные прямые и т. п. Теперь эти знания нужно углубить и пополнить новыми фактами. В этой книге, предназначенной для изучения в VI, VII и VIII классах, речь будет идти не о пространственных предметах, а лишь о фигурах, расположенных в плоскости.

Геометрия (как, впрочем, и любая другая наука) очень интересна. Но интерес не приходит сам по себе, он завоевывается в труде. Решайте задачи, возвращайтесь (без напоминания учителя) к тому, что было пройдено вчера, на прошлой неделе, месяц назад, проверяйте, все ли помните, все ли понятно. И чем меньше непонятного, неясного будет оставаться, тем большее влечение вы будете чувствовать к математике, тем более привлекательной и интересной она будет казаться.

Изучая геометрию, вы получите представление о том, как нужно рассуждать при решении задач, как делать правильные умозаключения, или, как говорят, *логически мыслить*. Навыки логического мышления нужны всем — и не только на уроках математики, а в самых различных случаях жизни: они помогают сделать верный вывод, найти выход из затруднительного положения, убедить других в правильности найденного решения и т. д.

Ответов к задачам вы в конце книги не найдете. Ведь мы хотим, чтобы вы научились верно рассуждать, были уверены в правильности логических доводов, в разумности найденного пути решения. Мы хотим, чтобы вы смогли применять свои геометрические и логические знания в жизни, в вашей будущей работе,— а ведь жизнь не дает ответов на те вопросы, легкие и трудные, которые она ставит. Поэтому привыкайте решать задачи без «подглядывания» в ответ. А если иногда решение ваше окажется не совсем правильным, неточным,— вас поправят товарищи и учитель.

Математика—и, в частности, геометрия—нужна и полезна буквально всем: инженерам и космонавтам, врачам и спортсменам, строителям и геологам. Уже сейчас, в двадцатом столетии, математика все более прочно завоевывает позиции в различных областях—даже в медицине, живописи, музыке,— не говоря уже о технике. А ведь вам придется жить и работать, быть участниками коммунистического строительства не только в 20-м, но и в 21-м столетии, когда роль математики еще более возрастет. И хотя нравится математика не всем одинаково—одним больше, другим меньше,—но изучать и хорошо знать ее нужно всем. Желаем вам успехов!

Авторы

ГЛАВА I

ФИГУРЫ И ДВИЖЕНИЯ

1. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ОКРУЖНОСТИ

Любое множество точек в геометрии называют *фигурой*. Множество P на рисунке 1 состоит из пяти точек: A, B, C, D, E . Эту фигуру можно записать так:

$$P = \{A, B, C, D, E\}.$$

В геометрии приходится рассматривать и такие фигуры, которые содержат бесконечно много точек. Например, окружность l с центром O и радиусом r есть множество всех точек плоскости, находящихся на расстоянии r от точки O . Окружность l — это *бесконечное* множество точек: сколько бы точек на окружности ни отметили, всегда на ней можно указать еще и еще точки. Поэтому задать множество l перечислением всех его точек невозможно. Вместо этого применяется запись:

$$l = \{M: |OM| = r\}. \quad (1)$$

Двоеточие в этой записи может быть заменено словами «для которых», и вся запись читается так: «окружность l есть множество всех точек M , для которых $|OM| = r$ ».

Равенство $|OM| = r$ означает, что *расстояние* между точками O и M (т. е. длина отрезка OM) равно r . Для нахождения этого расстояния (например, с помощью линейки) проводить отрезок OM не обязательно. Как правило, при рассмотрении расстояний наименование указываться не будет, т. е. не будет указываться, какая единица длины (сантиметр, метр или какая-либо иная единица) была использована для измерения.

В формуле (1) запись, стоящая после двоеточия, т. е. $|OM| = r$, представляет собой *характеристическое свойство*, которое задает фигуру l . Если точка M обладает этим свойством, то она принадлежит l , а если не обладает, то не принадлежит ей.

Возьмем, например, в качестве M точки A, B или C (рис. 2). Эти точки обладают указанным свойством: $|OA| = |OB| = |OC| = r$. Значит, они принадлежат множеству l (окружности): $A \in l, B \in l, C \in l$. Точки же D и F не обладают указанным свойством: $|OD| \neq r, |OF| \neq r$;

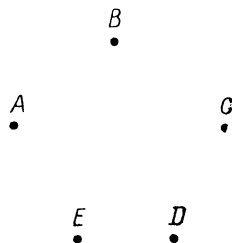


Рис. 1

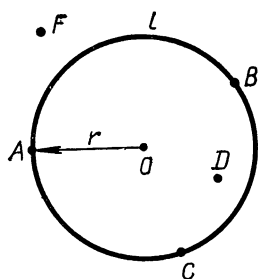


Рис. 2

эти точки не принадлежат рассматриваемой окружности: $D \notin l$ и $F \notin l$.

Заметим, что в записи (1) точка O и число r предполагаются заданными, а M — переменная точка.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

а) Является ли фигурой множество, состоящее из двух точек?

Из одной точки? Пустое множество?

Является ли фигурой вся плоскость?

б) Приведите примеры фигур (кроме окружности), представляющих собой бесконечное множество точек.

в) Прочтите записи:

$$K = \{M : |OM| = 2\},$$

$$N = \{M : |FM| = 4\}.$$

Какие из точек, отмеченных на рисунке 3, принадлежат множеству K ? Множеству N ?

ЗАДАЧИ

1. Проверьте с помощью циркуля (или измерителя), какие из следующих высказываний верны для точек, изображенных на рисунке 4:

$$|AB| = 2, |BC| = 6, |BD| = 4, |AD| = 3.$$

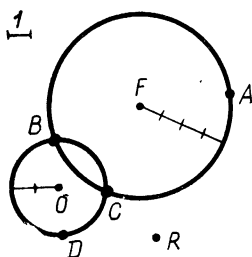


Рис. 3

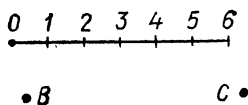


Рис. 4

2. Начертите луч m с началом в точке O . Постройте на луче m такие точки A, B, C , расстояния (в сантиметрах) до которых имеют следующие значения: $|OA| = 5$, $|OB| = 2$, $|OC| = 8$. Найдите и запишите знаками:

а) фигуру P , состоящую из всех точек луча m , удаленных от A на расстояние 3; б) фигуру Q , состоящую из всех точек луча m , удаленных от B на расстояние 3.

3. Среди точек, отмеченных на рисунке 5, найдите те, которые удалены от O на расстояние 3. Запишите множество всех этих точек с помощью фигурных скобок.

4. Возьмите точку M и найдите какие-нибудь точки A, B, C, D , для которых $|MA| = |MB| = 4$, $|MC| = 3$, $|MD| = 2$ (расстояния в сантиметрах).

рах). Проведите теперь окружность радиуса 3 с центром M . Обозначьте эту окружность буквой m . Какие из следующих высказываний верны:

- 1) $A \in m$; 2) $B \in m$; 3) $C \in m$; 4) $D \in m$?
5. Какие из изображенных на рисунке 6 точек принадлежат множеству $l = \{N: |ON| = 2\}$?
6. Отметьте точку O и начертите фигуру $F = \{M: |OM| = 6\}$.

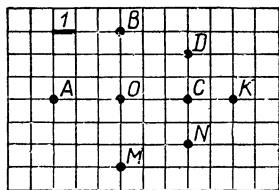


Рис. 5

7. Начертите прямую l и отметьте на ней точку K . Найдите множество всех точек прямой l , находящихся от K на расстоянии 5. Ответ запишите с помощью фигурных скобок.

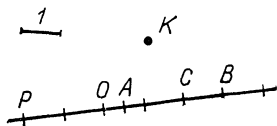


Рис. 6

8. Какие из следующих высказываний верны (ответы подтвердите чертежом):
 - а) для каждого угла существует окружность, пересекающая стороны этого угла в четырех точках;
 - б) существует такой угол и такая окружность, которая пересекает стороны этого угла в четырех точках;
 - в) существует такой угол, что *каждая* окружность пересекает его стороны в четырех точках?
9. Возьмите точки A и B , для которых $|AB| = 4$. Постройте множества $l = \{M: |AM| = 3\}$ и $m = \{M: |BM| = 2\}$. Что представляет собой фигура $l \cap m$?

2. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ФИГУРЫ С ОКРУЖНОСТЬЮ

Задача. Даны ломаная m и точка O (рис. 7). Найти множество всех точек ломаной m , которые удалены от точки O на расстояние 2.

Решение. Множество l всех точек, удаленных от O на расстояние 2, представляет собой окружность с центром O и радиусом 2. Проведем эту окружность (рис. 8). Каждая искомая точка должна принадлежать, во-первых, ломаной m и, во-вторых,

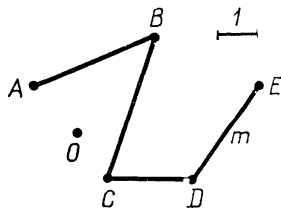


Рис. 7

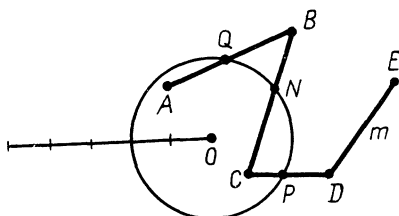


Рис. 8

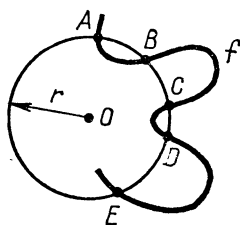


Рис. 9

окружности l . Значит, надо найти *пересечение* $m \cap l$ множеств m и l . На рисунке 8 это пересечение состоит из трех точек Q , N , P . Эти точки и являются искомыми.

Вообще, чтобы найти все точки фигуры f , удаленные от данной точки O на данное расстояние r , нужно провести окружность радиуса r с центром O . Пересечение фигуры f с этой окружностью и есть множество точек фигуры f , удаленных от O на расстояние r (рис. 9).

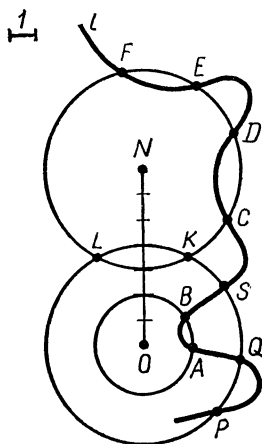


Рис. 10

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Укажите множество всех точек линии l (рис. 10), удаленных от точки O на расстояние 2; от точки N на расстояние 4.
- Как можно охарактеризовать множество, состоящее из точек P , Q , S (рис. 10)?
- Сколько точек содержат следующие фигуры (рис. 10):

$$F = l \cap \{M: |OM| = 2\},$$

$$T = \{M: M \in l \text{ и } |MN| = 4\}?$$

ЗАДАЧИ

- Начертите систему координат и отметьте точки $A(1; 3)$, $K(7; 3)$, $B(3; 6)$, $C(-1; 4)$, $D(8; -1)$. Найдите множество всех точек луча AK , удаленных: а) от B на расстояние 5; б) от C на расстояние 2; в) от D на расстояние 4.
- В системе координат отметьте точки $A(3; 5)$, $B(-2; 1)$, $C(6; 4)$, $D(3; -1)$ и $M(2; 1)$. Проведите трехзвенную ломаную $ABCD$ и найдите на ней все точки, удаленные от точки M на расстояние 3. Запишите множество найденных точек.
- Начертите угол величиной 70° с вершиной в точке O . Постройте множество всех точек этого угла, удаленных от O на расстояние 4 см.
- Дан луч m с началом в точке B и точка K на нем, причем $|BK| = 3$. Что представляют собой следующие множества: а) $F = \{N: N \in m \text{ и } |KN| = 2\}$; б) $P = \{L: L \in m \text{ и } |KL| = 4\}$?
- Начертите острый угол. Можно ли внутри этого угла найти такую точку M , чтобы множество всех точек угла, удален-

ных от M на расстояние 2,5, представляло собой: а) дугу окружности; б) две дуги окружности?

15. Через точки $A(-3; -5)$ и $B(5; 3)$ проведите прямую l . На этой прямой найдите множество точек, удаленных от начала координат на расстояние 1,8.
16. Начертите окружность l радиуса 3 с центром P . Возьмите точку T , удаленную от точки P на 5 единиц. Найдите на окружности l множество точек, удаленных от точки T на расстояние 4.

3. ВНУТРЕННЯЯ И ВНЕШНЯЯ ОБЛАСТИ ОКРУЖНОСТИ

Окружность l с центром O и радиусом r делит плоскость на две области: *внутреннюю* и *внешнюю*.

К внутренней области G относятся все точки, которые находятся от O на расстоянии, меньшем r , т. е. все точки M , для которых $|OM| < r$:

$$G = \{M: |OM| < r\}.$$

На рисунке 11 точки A_1, A_2, A_3 принадлежат внутренней области: $|OA_1| < r, |OA_2| < r, |OA_3| < r$. Точка O тоже принадлежит внутренней области (она находится от O на расстоянии 0).

Внешней области принадлежат все точки, для которых $|OM| > r$. На рисунке 11 точки A_4 и A_5 принадлежат внешней области. Точки самой окружности не принадлежат ни внутренней, ни внешней области. Окружность является *границей* каждой из этих областей.

Объединение $K = l \cup G$ окружности l и ее внутренней области G называется *кругом* с центром O и радиусом r . Точка A принадлежит кругу, если она принадлежит либо внутренней области ($|OM| < r$), либо окружности ($|OM| = r$). Таким образом, круг состоит из всех тех точек M , для которых $|OM| \leq r$:

$$K = \{M: |OM| \leq r\}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Укажите, какие из обозначенных на рисунке 12 точек принадлежат внутренней области окружности

$$l_1 = \{M: |OM| = 4\}.$$

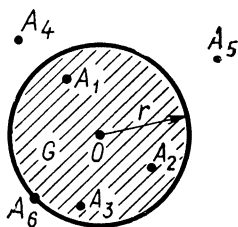


Рис. 11

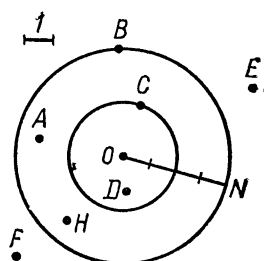


Рис. 12

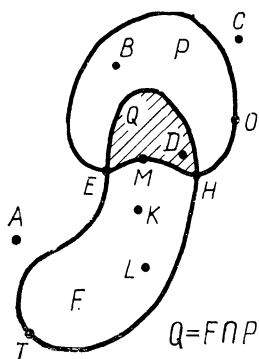


Рис. 13

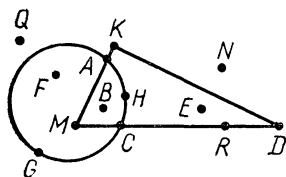


Рис. 14

б) Какие точки принадлежат внешней области окружности

$$l_2 = \{M: |OM| = 2\} \text{ (рис. 12)?}$$

в) Какие точки одновременно принадлежат внутренней области окружности l_1 и внешней области окружности l_2 ? Кругу $K_1 = \{M: |OM| \leq 4\}$ и внешней области окружности l_2 (рис. 12)?

г) Что представляют собой следующие фигуры:

- 1) $l = \{F: |NF| = 3\}$; 2) $G = \{F: |NF| < 3\}$;
3) $H = \{F: |NF| > 3\}$?

д) Какие из обозначенных на рисунке 13 точек принадлежат фигурам F , P , Q ?

е) Какие из обозначенных на рисунке 14 точек принадлежат: 1) пересечению круга и треугольника; 2) объединению круга и треугольника; 3) пересечению окружности и контура тре-

угольника; 4) объединению окружности и контура треугольника?

ЗАДАЧИ

17. Запишите формулами следующие высказывания:

а) фигура F есть внутренняя область окружности с центром O и радиусом 2;

б) фигура K есть круг с центром O и радиусом 2.

18. Возьмите точку C и выберите единичный отрезок. Постройте на плоскости и выделите цветным карандашом множество всех точек A , для которых:

$$\text{а) } |CA| \leq 2; \text{ б) } |CA| \geq 3.$$

19. Выберите точку O и постройте множества $K = \{M: |OM| \leq 4\}$ и $N = \{M: |OM| \geq 3\}$. Выделите цветным карандашом фигуру $K \cap N$.

20. Начертите прямую l и отметьте точку O на ней. Что представляют собой следующие множества точек:

$$\text{а) } F = \{M: M \in l \text{ и } |OM| = 2\};$$

$$\text{б) } P = \{M: M \in l \text{ и } |OM| \leq 3\}?$$

Обозначьте на чертеже точки A, B, C, D таким образом, чтобы были справедливы равенства: $F = \{A, B\}$, $P = [CD]$.

21. Отметьте две точки M_1 и M_2 , для которых $|M_1 M_2| = 7$. Начертите круг K_1 с центром M_1 и радиусом 5, а также круг K_2 с центром M_2 и радиусом 6. Покажите (штриховкой) множество P , являющееся объединением кругов K_1 и K_2 . Запишите символами, что P — объединение множеств K_1 и K_2 . Другой штриховкой отметьте пересечение кругов K_1 и K_2 .
22. Дан луч m с началом в точке B и точка K на нем, причем $|BK| = 3$. Что представляют собой следующие множества точек:

а) $H = \{N : N \in m \text{ и } |KN| \leq 2\}$;

б) $P = \{L : L \in m \text{ и } |KL| \leq 4\}$?

4. ГРАНИЦА ОБЛАСТИ

Всякая прямая, принадлежащая плоскости, делит эту плоскость на две области. Две точки принадлежат одной области, если соединяющий их отрезок не имеет общих точек с прямой l . На рисунке 15 точки A и B принадлежат одной области (или, как еще говорят, лежат *по одну сторону* от прямой l). Точки A и C принадлежат различным областям (лежат *по разные стороны* от прямой l): отрезок, соединяющий точки A и C , пересекает прямую l .

На рисунке 16 две области P и Q , на которые прямая l делит плоскость, показаны различной штриховкой. Прямая l является границей каждой из этих областей. Каждую из фигур $P \cup l$ и $Q \cup l$ называют *полуплоскостью* с границей l . Пересечением этих двух полуплоскостей служит прямая l , а объединением их является вся плоскость.

Всякая замкнутая линия l , которая не пересекает себя, разбивает плоскость на две области: внутреннюю и внешнюю. Линия l является границей каждой из этих областей. Мы видели это на примере окружности (рис. 11). На рисунке 17 изображена замкнутая ломаная линия, которая не пересекает себя. Точки A и B принадлежат внутренней области, определяемой линией l , точки C и D — внешней области. Две точки, принадлежащие одной области, можно соединить ломаной, не пересекающей границу области (см. тонкие линии на рис. 17). Если же две точки принадлежат разным областям, то любая ломаная, соединяющая эти точки, пересекает общую границу областей, т. е. линию l . Объединение замкнутой

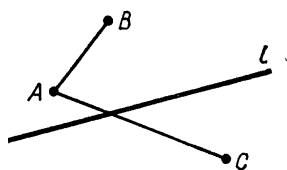


Рис. 15

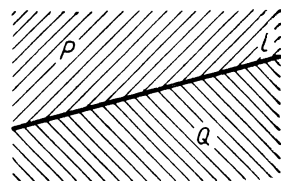


Рис. 16

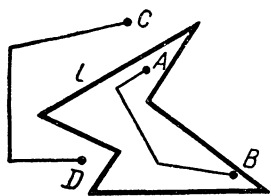


Рис. 17

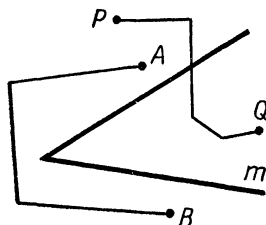


Рис. 18

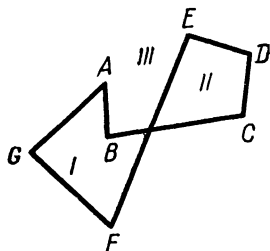


Рис. 19

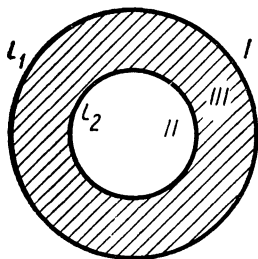


Рис. 20

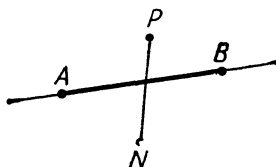


Рис. 21

ломаной линии, которая не пересекает себя, и ее внутренней области называется *многоугольником*.

Линия m , являющаяся объединением двух лучей, исходящих из одной точки, также делит плоскость на две области (рис. 18). И в этом случае две точки, принадлежащие одной и той же области, могут быть соединены ломаной, не пересекающейся с границей m этих областей. Если же точки принадлежат разным областям, то любая ломаная, соединяющая эти точки, пересекается с m .

Если замкнутая ломаная линия пересекает себя (рис. 19), то она разбивает плоскость более чем на две области.

На рисунке 20 изображены две окружности l_1 и l_2 с общим центром (такие окружности называют *концентрическими*). Линия $l_1 \cup l_2$ разбивает плоскость на три области; одна из этих областей неограниченная, вторая представляет собой внутреннюю область окружности, а третья (заштрихованная на рис. 20) — кольцо. Граница кольца представляет собой объединение двух линий l_1 и l_2 .

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Существует ли ломаная линия, соединяющая точки P и N (рис. 21), которая не пересекается с отрезком AB ? Лучом AB ? Прямой AB ?
- Какие из следующих высказываний истинны: 1) объединение любых двух лучей делит плоскость на две области; 2) существуют два луча, объединение которых делит плоскость на две области; 3) любая ломаная делит плоскость на две области; 4) любая замкнутая ломаная делит плоскость на две области; 5) существует замкнутая пересекающаяся ломаная, которая делит плоскость на две области?
- Даны прямая l и три не принадлежащие ей точки A , B и C . Известно, что любая ломаная, соединяющая A

с точкой B или C , пересекается с l . Что можно сказать о расположении точек B и C относительно прямой l ?

- г) Точка P не принадлежит прямой l . Убедитесь, что множество $R = \{M: [PM] \cap l \neq \emptyset\}$ представляет собой ту из двух полуплоскостей с границей l , которая не содержит точки P .

- д) На сколько областей делят плоскость три окружности на рисунке 22? Из скольких окружностей состоит граница каждой из этих областей?

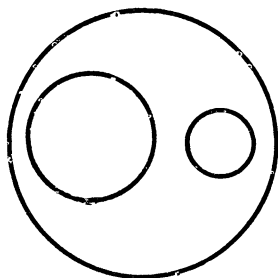


Рис. 22

ЗАДАЧИ

23. Какие из следующих высказываний истинны? Ответы подтвердите чертежами. а) Всякий угол есть пересечение двух полуплоскостей. б) Существует угол, который является пересечением двух полуплоскостей. в) Всякий угол является объединением двух полуплоскостей. г) Существует угол, который является объединением двух полуплоскостей.
24. Две прямые имеют одну общую точку. Сделайте чертеж и занумеруйте области, на которые эти две прямые разбивают плоскость. Всегда ли две прямые разбивают плоскость на четыре области?
25. Начертите два многоугольника M_1 , M_2 так, чтобы фигура $M_1 \cup M_2$: а) была многоугольником; б) не была многоугольником. В каждом случае обведите цветным карандашом границу фигуры $M_1 \cup M_2$.
26. Докажите, что линия l_1 является границей многоугольника (рис. 23). Какие из отмеченных точек принадлежат этому многоугольнику?
27. Отметьте точку O и заштрихуйте фигуру $F = \{M: 2 \leq |OM| \leq 3\}$, приняв за единицу длины 1 см. Обведите цветным карандашом границу фигуры F .

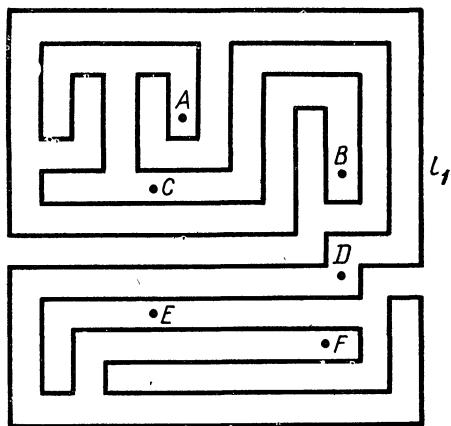


Рис. 23

28. Прямая пересекает окружность в двух точках. Сделайте чертеж и занумеруйте области, на которые разбивается плоскость. На какое число областей разбивается плоскость при другом расположении прямой и окружности?
29. Начертите три луча так, чтобы плоскость разбивалась на три области. Сделайте несколько различных чертежей.
30. Начертите два многоугольника M_1 , M_2 так, чтобы фигура $M_1 \cap M_2$: а) была многоугольником; б) не была многоугольником.
31. Отметьте точки A и B , для которых $|AB|=4$, и начертите линии $F_1 = \{M: |AM|=2\}$, $F_2 = \{M: |BM|=3\}$. На сколько областей делят плоскость эти линии?

5. НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА

Если точка M принадлежит отрезку AB , то справедливо равенство:

$$|AM| + |MB| = |AB|. \quad (1)$$

На рисунке 24, например, $|AM|=3$, $|MB|=4$, $|AB|=7$, т. е. соотношение (1) выполняется.

Пусть теперь $M \notin [AB]$. Тогда могут представиться два случая: 1) M лежит на прямой AB (вне отрезка AB) и 2) M не принадлежит прямой AB .

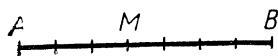


Рис. 24

В первом случае либо $|AM| > |AB|$ (рис. 25), либо $|MB| > |AB|$ (рис. 26), и поэтому справедливо неравенство

$$|AM| + |MB| > |AB|. \quad (2)$$



Рис. 25

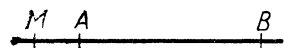


Рис. 26

Во втором случае (рис. 27) неравенство (2) также справедливо. В самом деле, длина отрезка AB меньше длины любой другой линии, соединяющей точки A и B (в частности, меньше длины ломаной AMB).

Итак, если $M \notin [AB]$, то справедливо неравенство (2).

Учитывая соотношения (1) и (2), мы убеждаемся, что для любых точек A , B , M справедливо неравенство

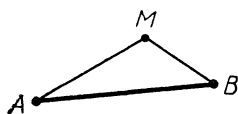


Рис. 27

$$|AM| + |MB| \geq |AB|, \quad (3)$$

которое называется неравенством треугольника.

Из соотношений (1) и (2) вытекает также, что отрезок AB есть множество всех точек, для которых выполняется равенство (1):

$$[AB] = \{M: |AM| + |MB| = |AB|\}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

а) Точки M , K и O — вершины треугольника. Какие из следующих высказываний истинны:

- 1) $|MK| \leq |MO| + |KO|$; 4) $|KO| < |MK| + |MO|$;
- 2) $|MO| \leq |MK| + |KO|$; 5) $|MO| = |MK| + |KO|$;
- 3) $|KM| < |OM| + |OK|$; 6) $|KO| = |MK| + |MO|$?

б) Что представляют собой следующие множества:

$$\begin{aligned} l &= \{M: |AM| + |MB| = |AB|\}; \\ m &= \{M: |AM| = |AB| + |BM|\}; \\ n &= \{M: |AB| > |AM| + |MB|\} \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

32. Существуют ли точки M , P и K , расстояния между которыми равны:

- а) $|MP| = 2$, $|PK| = 7$, $|MK| = 5$;
- б) $|MP| = 3$, $|PK| = 5$, $|MK| = 7$;
- в) $|MP| = 2$, $|PK| = 5$, $|MK| = 8$;
- г) $|MP| = 8$, $|PK| = 5$, $|MK| = 3$?

Когда возможно, сделайте чертеж.

33. Запишите все возможные случаи неравенства треугольника для точек M , N и K . Проверьте справедливость написанных соотношений, когда точки M , N и K имеют координаты

$$M(-5; 3), N(5; 3), K(2; 3).$$

34. Какие из следующих высказываний истинны? Ответы подтвердите чертежом:

- а) если $|AB| + |BC| > |AC|$, то точки A , B и C не могут лежать на одной прямой;
- б) если точки A , B и C не лежат на одной прямой, то $|AB| + |BC| > |AC|$;
- в) если точка B лежит на отрезке AC , то $|AB| + |BC| = |AC|$;
- г) для любых точек A , B и C , лежащих на одной прямой, выполняется равенство $|AB| + |BC| = |AC|$;
- д) если $|AC| + |BC| = |AB|$, то C принадлежит отрезку AB .

35. На числовой прямой l даны точки $A(1)$, $B(4)$, $C(-1)$ и задана фигура $F = \{M: |AM| + |MB| = |AB|\}$. Какие из следующих высказываний истинны:

- а) для любой точки M множества F справедливо соотношение $|CM| \leq 5$;
 б) в множестве F существует точка M , для которой $|CM| > 3$;
 в) для любой точки M множества F справедливо соотношение $|CM| > 3$;
 г) в множестве F существует точка M , для которой $|CM| < 2$?
36. Звенья ломаной $ABCD$ имеют длины соответственно 3 см, 5 см, 11 см. Может ли случиться, что расстояние между точками A и D равно: а) 20 см; б) 2 см?
37. Отметьте такие точки O и K , что $|OK| = 5$. Найдите множество всех точек фигуры $F = \{M: |OM| + |MK| = |OK|\}$, находящихся от точки O : а) на расстоянии 2; б) на расстоянии, не большем 2.
-
38. Можно ли найти такие точки A , B и O , что:
- а) $|AB| = 3\frac{2}{3}$; $|AO| = 5\frac{1}{24}$; $|BO| = 1\frac{7}{8}$;
 б) $|AO| = 2,5$; $|OB| = 2,5$; $|AB| = 2,5$;
 в) $|BO| = 3\frac{1}{6}$; $|OA| = 7\frac{1}{2}$; $|AB| = 4\frac{1}{5}$?
- Постройте точки A , B и O в тех случаях, когда возможно.
39. Отметьте в тетради две точки A , B и начертите фигуру $F = \{K: |AK| + |KB| = |AB|\}$.
40. Могут ли существовать треугольники BAC указанных в таблице видов, если известно, что:
- а) $|AB| = |AC|$;
 б) $|AB| > |BC|$;
 в) $|BC| \geq |AB|$;
 г) $|AB| + |AC| = |BC|$?
- Таблицу перечертите в тетрадь. В тех случаях, когда треугольник указанного вида существует, поставьте в соответствующей графе таблицы знак $+$.

	Разносторонний	Равнобедренный с вершиной A	Равнобедренный с вершиной B	Равнобедренный с вершиной C	Равносторонний
а)					
б)					
в)					
г)					

6. ДВИЖЕНИЯ

В 5 классе вы познакомились с параллельным переносом. Если указано, что параллельный перенос переводит точку A в точку A_1 , то мы можем узнать, в какую точку плоскости перейдет при этом параллельном переносе произвольная точка плоскости.

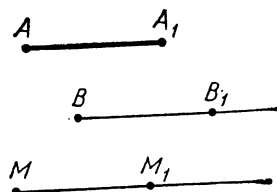


Рис. 28

Для того чтобы найти точку B_1 , в которую перейдет заданная точка B , надо провести из точки B луч l , имеющий то же направление, что и луч AA_1 , и отложить на луче l отрезок BB_1 , конгруэнтный AA_1 (рис. 28). Таким же образом можно для любой точки M плоскости найти ее образ M_1 , т. е. точку, в которую при рассматриваемом параллельном переносе переходит точка M . Параллельный перенос представляет собой отображение плоскости на ту же самую плоскость, или, как еще говорят, отображение плоскости на себя.

Если рассматриваемый параллельный перенос обозначить буквой t , то образы точек $A, B, \dots$ при этом параллельном переносе принято обозначать через $t(A), t(B), \dots$ (читается: « t от A », « t от B », ...). На рисунке 28 $t(A) = A_1, t(B) = B_1, t(M) = M_1$.

При параллельном переносе расстояние между точками сохраняется, т. е. если A_1, B_1 — образы точек A, B при этом параллельном переносе, то $|A_1B_1| = |AB|$. На рисунке 28

$$|B_1M_1| = |BM|, |A_1B_1| = |AB|, |M_1A_1| = |MA|, \dots$$

Отображение плоскости на себя, при котором сохраняется расстояние, называется движением плоскости.

Таким образом, любой параллельный перенос представляет собой движение плоскости.

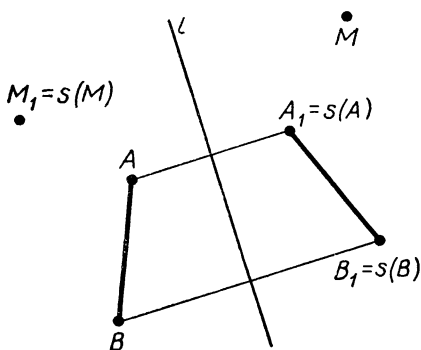


Рис. 29

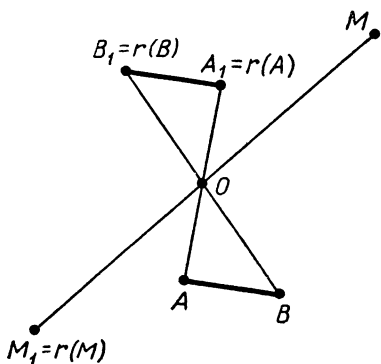


Рис. 30

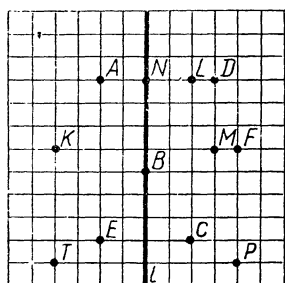


Рис. 31

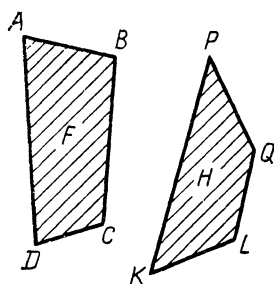


Рис. 32

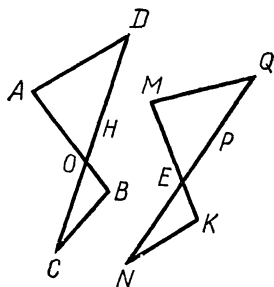


Рис. 33

Другим примером движения является осевая симметрия. Действительно, пусть l — некоторая прямая. Симметрию относительно прямой l обозначим через s , т. е. точку, симметричную точке M относительно l , будем обозначать через $s(M)$. Как известно из 5 класса, при этом отображении сохраняется расстояние: если A, B — две произвольные точки, $A_1 = s(A)$, $B_1 = s(B)$ — их образы при симметрии s , то $|AB| = |A_1B_1|$ (рис. 29).

Еще одним примером движения является центральная симметрия: если A, B — произвольные точки и $A_1 = r(A)$, $B_1 = r(B)$ — их образы при отображении r , представляющем собой центральную симметрию относительно точки O , то $|A_1B_1| = |AB|$ (рис. 30).

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) В какие точки переходят A, B, C при симметрии s относительно прямой l (рис. 31)? Какая точка переходит в точку K ? В точку P ? Обозначены ли на рисунке точки, являющиеся образами точек A, K, D ? Установите, какие из следующих высказываний истинны:

$$s(A) = L, \quad s(L) = A, \quad s(D) = A, \\ s(B) = B, \quad s(P) = P, \quad s(B) = N.$$

- б) Может ли при движении окружность радиуса 3 перейти в окружность радиуса 2?

- в) Можно ли считать, что фигура F на рисунке 32 получается из фигуры H в результате некоторого движения?

- г) Движение f переводит фигуру H в фигуру P (рис. 33). Назовите образы точек A, B, C и D при этом движении. Какие из расстояний между точками M, N, E, K и Q можно указать, если известно, что $|AB| = 5,5$; $|AO| = 4$; $|AC| = 7$; $|AD| = 5$?

- д) Известно, что $|AB| = 3$, $|CD| = 3$, $|MN| = 4$. Какие из следующих высказываний истинны: 1) существует движение, переводящее точки A и B в точки M и N ; 2) для любого движения f , удовлетворяющего условию $f(A) = C$, справед-

- ливо соотношение $f(B) = D$; 3) если f — движение и $f(A) = C$, то точки D и $f(B)$ лежат на одной окружности с центром C ?
- е) Дана окружность m с центром в точке O . При некотором движении g окружность m переходит в p . Можно ли утверждать, что точка $O_1 = g(O)$ есть центр окружности p ?

ЗАДАЧИ

41. Скопируйте рисунок 34. Считая, что параллельный перенос t переводит точку M в M_1 , расставьте на рисунке обозначения таким образом, чтобы были справедливы равенства: $t(A) = K$, $t(L) = B$, $t(C) = P$, $t(D) = Q$, $t(F) = E$.
42. Какие из следующих высказываний истинны? Ответы подтвердите чертежами:
- если t — параллельный перенос, то существуют такие точки A и B , что $t(A) = B$ и $t(B) = A$;
 - если s — осевая симметрия, то существуют такие точки A и B , что $s(A) = B$ и $s(B) = A$;
 - если r — центральная симметрия, то существуют такие точки A и B , что $r(A) = B$ и $r(B) = A$.
43. Постройте точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , являющиеся образами точек $A(-3; 2)$, $B(0; -2)$, $C(-3; -1)$, $D(4; 0)$ при отображении s , представляющем собой осевую симметрию относительно оси абсцисс.
44. Скопируйте рисунок 35. При некотором движении луч l переходит в l_1 , а точка A — в точку A_1 . Постройте образы точек B и C при этом движении.
45. Точка C принадлежит отрезку AB . При некотором движении f точки A , B и C переходят в точки P , Q и R . Докажите, что точка R принадлежит отрезку PQ .

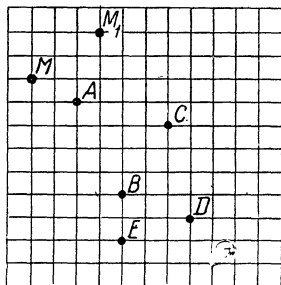


Рис. 34

46. Отображение r переводит каждую точку M в точку, симметричную ей относительно начала координат O . Отметьте точки $A(3; 1)$, $B(-2; 2)$, $C(2; -3)$, $D(-4; -1)$ и постройте на том же чертеже точки $K = r(A)$, $F = r(B)$, $N = r(C)$, $L = r(D)$. Имеются ли на этом чертеже точки $r(O)$, $r(K)$, $r(L)$?
47. Отметьте точки $A(1; -2)$, $B(-3; -1)$, $C(-1; 2)$ и постройте фигуры $K = \{M: |AM| = 3\}$, $L = \{M: |BM| = 2\}$. Постройте фигуры K_1 и L_1 , являющиеся

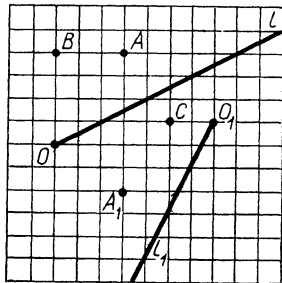


Рис. 35

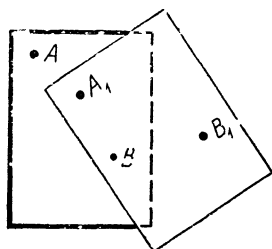


Рис. 36

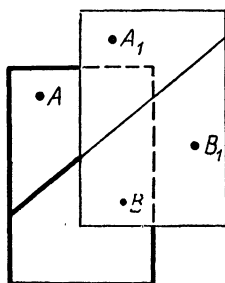


Рис. 37

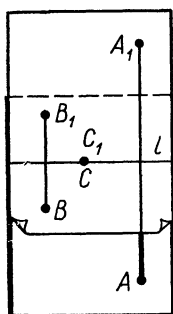


Рис. 38

ся образами фигур K и L при симметрии r относительно точки C .

48. Даны два луча: l с началом в точке O и l_1 с началом в точке O_1 . Отметьте на луче l три точки A , B и C . Постройте точки A_1 , B_1 и C_1 , в которые переходят точки A , B и C при движении, переводящем луч l в луч l_1 .

49. Точки A , B и C — вершины равностороннего треугольника. При некотором движении они переходят в точки P , Q и R . Проведена окружность с центром в точке P , проходящая через Q . Пройдет ли она через точку R ?

7. СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЙ

Произвольное движение плоскости можно наглядно описать так. Будем представлять себе плоскость в виде двух наложенных один на другой листов, верхний из которых прозрачен. На обоих листах изображены совмещенные между собой точки. Передвинув прозрачный лист в новое положение (рис. 36), мы увидим как первоначальное положение точек (нанесенных на нижнем листе), так и их новое положение (на прозрачном листе). При этом если материал листов нерастяжим, то расстояние между любыми двумя точками в первоначальном положении равно расстоянию между двумя точками, в которые они перейдут. В результате мы и получаем отображение плоскости на себя, причем это отображе-

ние сохраняет расстояния.

Например, для осуществления параллельного переноса можно сдвинуть верхний (прозрачный) лист так, чтобы некоторая прямая скользила по себе (рис. 37). Для осуществления симметрии относительно прямой l следует перевернуть прозрачный лист обратной стороной и наложить его на непрозрачный лист так, чтобы каждая точка прямой l попала на свое прежнее место (рис. 38).

Описанная наглядная модель показывает, что при движении плоскость как бы «накладывается» на эту же самую плоскость, причем без изменения расстояний, т. е. без растяжений, сжатий и других искажений. Поэтому *каждая фигура перехо-*

дит при движении в конгруэнтную ей фигуру. В частности, отрезок переходит при движении в конгруэнтный ему отрезок, угол — в конгруэнтный ему угол, окружность — в окружность, луч — в луч, прямая — в прямую.

Для обозначения конгруэнтности двух фигур пользуются знаком $\cong$. Запись $F \cong H$ означает, что фигуры F и H конгруэнтны, т. е. существует движение g («наложение»), которое переводит фигуру F в H .

При движении пересечение фигур переходит в пересечение их образов (рис. 39). Иными словами, если g — некоторое движение, а A и B — произвольные фигуры, то

$$g(A \cap B) = g(A) \cap g(B).$$

Точно так же объединение фигур переходит при движении в объединение их образов:

$$g(A \cup B) = g(A) \cup g(B).$$

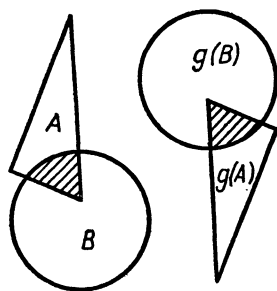


Рис. 39

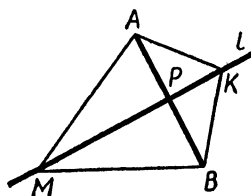


Рис. 40

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Верно ли следующее утверждение: если $|AB| = |CD|$, то существует движение, переводящее точки A и B в точки C и D ? (При ответе используйте описанную в тексте модель движения.)
- В плоскости начерчены две конгруэнтные окружности l и m и отмечены точки $A \in l$, $B \in m$. Существует ли движение, которое переводит окружность l в окружность m и при этом точку A переводит в точку B ?
- На рисунке 40 точки A и B симметричны относительно прямой l . Какие конгруэнтные фигуры вы можете указать на этом рисунке? Почему они конгруэнтны?
- Известно, что расстояние между любыми двумя точками фигуры F не превосходит 5. Справедливо ли то же самое для фигуры G , которая конгруэнтна фигуре F ?
- Прямые l и m пересекаются в точке A . При движении g эти прямые переходят в прямые l_1 и m_1 , пересекающиеся в точке B . В какую точку переходит точка A при движении g ? Почему?

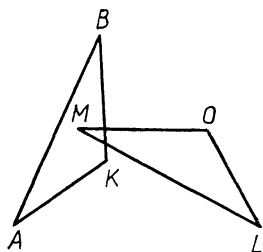


Рис. 41

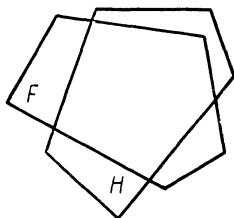


Рис. 42

50. Точки A и B лежат по разные стороны прямой l . Движение g переводит прямую l в прямую m , а точки A и B в точки C и D . Докажите, что точки C и D лежат по разные стороны от прямой m .

51. Постройте в разных положениях два прямоугольных треугольника, катеты которых имеют длины 3 см и 2 см. В первом треугольнике из вершины прямого угла через середину гипотенузы проведен луч l . а) Установите с помощью прозрачного материала, что эти треугольники конгруэнтны. б) Постройте луч, в который переходит луч l при движении, переводящем первый треугольник во второй.

52. Даны два луча l и m , исходящие из одной точки O , и луч l_1 , исходящий из точки O_1 . Постройте луч m_1 , в который может перейти m при движении, переводящем l в l_1 . Однозначно ли определяется положение луча m_1 ?

53. Проверьте, воспользовавшись прозрачным материалом, что: а) существует движение, переводящее $\triangle ABK$ (рис. 41) в $\triangle MOL$; б) $F \cong H$ (рис. 42).

54. Возьмите произвольные точки O и K . Постройте фигуру $F = \{M: |MO|=3\}$. Постройте фигуру N , в которую переходит фигура F при движении, переводящем точку O в точку K .

8. ПОСТРОЕНИЕ СИММЕТРИЧНЫХ ФИГУР

Осевая симметрия есть движение. Поэтому все свойства движений справедливы для осевой симметрии. В частности, две фигуры, симметричные относительно некоторой прямой, конгруэнтны между собой.

Задача 1. Построить фигуру, симметричную данной ломаной $ABCD$ относительно прямой l .

Решение. Ломаная $ABCD$ представляет собой объединение отрезков AB , BC и CD (рис. 43). Построим точки A_1 , B_1 , C_1 и D_1 , симметричные точкам A , B , C и D относительно прямой l . Отрезку AB симметричен отрезок A_1B_1 , отрезку BC — отрезок B_1C_1 , отрезку CD — отрезок C_1D_1 . Объединению же отрезков AB , BC и CD симметрично объединение отрезков A_1B_1 , B_1C_1 и C_1D_1 , т. е. ломаная $A_1B_1C_1D_1$.

Задача 2. Даны луч m с началом в точке A и симметричный ему относительно прямой l луч m_1 с началом в точке A_1 . Из точки A проведен еще один луч p (рис. 44). С помощью линейки и транспортира построить симметричный ему луч p_1 .

Решение. Если луч p получается из луча m поворотом, например, на угол 40° по часовой стрелке, то симметричный ему луч p_1 получается из луча m_1 поворотом на угол 40° , но уже против часовой стрелки. Этот угол можно отложить с помощью транспортира, а затем провести искомым луч p_1 (рис. 45).

Задача 3. Даны окружности m и m_1 с центрами O и O_1 , симметричные относительно прямой l , и точка A , принадлежащая окружности m (рис. 46). Построить точку A_1 , симметричную точке A относительно прямой l .

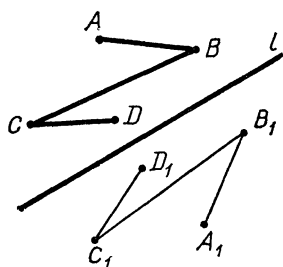


Рис. 43

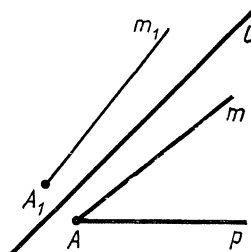


Рис. 44

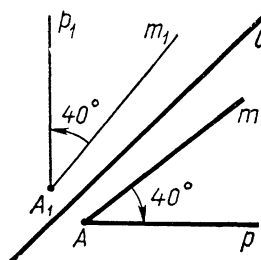


Рис. 45

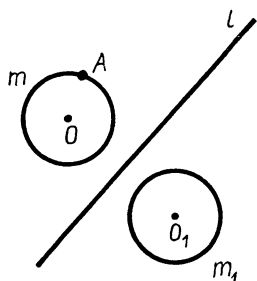


Рис. 46

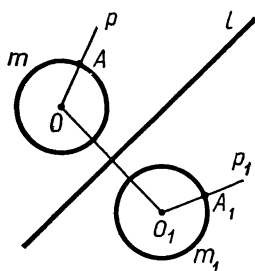


Рис. 47

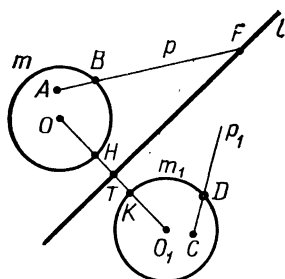


Рис. 48

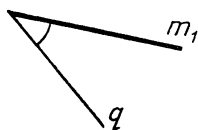
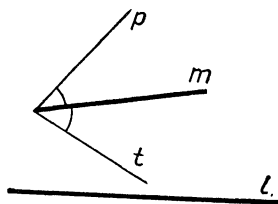


Рис. 49

Решение. При симметрии относительно прямой l луч OO_1 перейдет в луч O_1O . Проведем луч p с началом в точке O , проходящий через точку A , и построим с помощью транспортира и линейки луч p_1 (задача 2), симметричный p относительно l (рис. 47). Точка A есть пересечение окружности m и луча p . При симметрии пересечение фигур переходит в пересечение; поэтому точка A_1 , в которой пересекаются окружность m_1 и луч p_1 , искомая, т. е. $A_1 = s(A)$, где s — симметрия относительно прямой l .

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- На рисунке 48 окружности m и m_1 симметричны относительно прямой l ; лучи p и p_1 также симметричны. Укажите, какие из точек, обозначенных на рисунке, симметричны друг другу относительно прямой l .
- Можно ли утверждать, что точка пересечения лучей p и p_1 (рис. 48) принадлежит прямой l ? Почему?
- На рисунке 49 лучи m и m_1 симметричны относительно прямой l . Величина каждого из углов, отмеченных дугой, равна 40° . Какие из лучей, указанных на рисунке, симметричны относительно прямой l ?
- Обозначим через s симметрию относительно прямой l (рис. 50). Через какие из отмеченных на рисунке точек проходит прямая $a_1 = s(a)$?

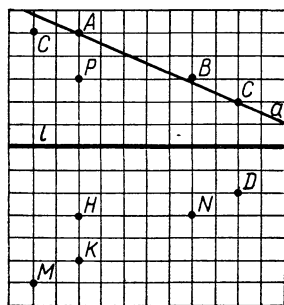


Рис. 50

- д) Назовите по рисунку 50 несколько пар симметричных относительно l прямых, которые можно провести через отмеченные на рисунке точки.

ЗАДАЧИ

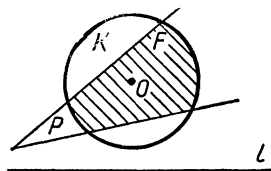


Рис. 51

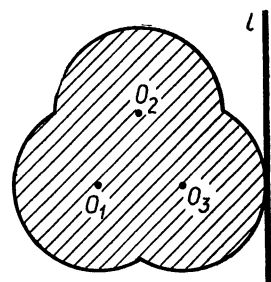


Рис. 52

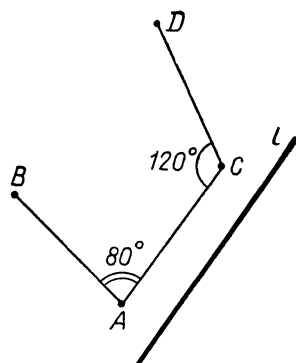


Рис. 53

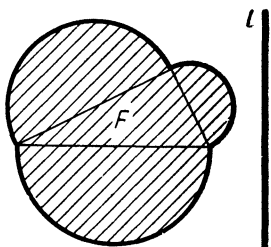


Рис. 54

55. Начертите окружность m и треугольник ABC , вершины которого принадлежат окружности m . Возьмите прямую l и постройте фигуру, симметричную окружности с вписанным в нее треугольником относительно прямой l .
56. В треугольнике MPK углы M и K конгруэнтны. Проведите перпендикуляр к стороне KM через ее середину. Проходит ли этот перпендикуляр через вершину P ? Является ли треугольник MPK равнобедренным?
57. Фигура F получена как пересечение угла P и круга K с центром O . Перечертите в тетрадь рисунок 51 и постройте фигуру F_1 , симметричную фигуре F относительно прямой l .
58. Фигура F получена как объединение трех кругов радиуса r с центрами O_1 , O_2 и O_3 , находящимися друг от друга на расстояниях $|O_1O_2| = |O_1O_3| = |O_2O_3| = r$ (рис. 52). Постройте фигуру F_1 , симметричную фигуре F относительно прямой l .
-
59. Начертите фигуру F , составленную из трех попарно пересекающихся прямых a , b и c . Возьмите прямую l и постройте фигуру, симметричную фигуре F относительно прямой l .
60. Скопируйте в тетрадь рисунок 53. По точкам постройте отрезок A_1C_1 , симметричный отрезку AC относительно прямой l . Постройте с помощью линейки и транспортира лучи A_1B_1 и C_1D_1 , симметричные лучам AB и CD относительно l .
61. Фигура F (рис. 54) получена как объединение прямоугольного тре-

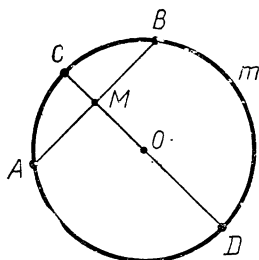


Рис. 55

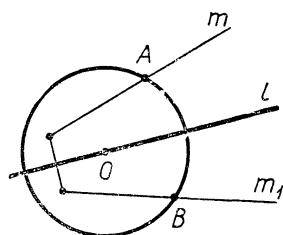


Рис. 56

угольника и трех кругов, центрами которых служат середины сторон прямоугольного треугольника. Постройте фигуру F_1 , симметричную фигуре F относительно прямой l .

9. ПРИМЕНЕНИЕ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой*.

На рисунке 55 в окружности m проведена хорда AB и диаметр CD , перпендикулярный этой хорде и пересекающий ее в точке M . Докажем, что M — середина хорды AB .

В самом деле, обозначим через s симметрию относительно прямой CD . Так как прямая CD проходит через центр окружности m , то она является осью симметрии этой окружности, т. е. $s(m) = m$. Далее, так как $(AB) \perp (CD)$, то луч

$l_1 = [MA)$ при симметрии s переходит в луч $l_2 = [MB)$. Следовательно, $s(m \cap l_1) = m \cap l_2$, т. е. $s(A) = B$. Итак, точки A и B симметричны относительно прямой CD и потому точка M — середина отрезка AB .

Замечание. Для краткости иногда говорят о симметрии относительно *отрезка* или *луча* (вместо того чтобы говорить о симметрии относительно *прямой*, на которой расположен этот отрезок или луч). Например, говорят, что две точки симметричны относительно диаметра окружности, две фигуры симметричны относительно биссектрисы угла и т. д.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Какие из следующих высказываний истинны:
 - всякий диаметр является хордой;
 - всякая хорда является диаметром;
 - длина любой хорды меньше или равна $2r$, где r — радиус окружности;
 - диаметр — наибольшая хорда?
- Лучи m и m_1 (рис. 56) симметричны относительно прямой l . Окружность с центром $O \in l$ пересекает лучи m и m_1 в точках A и B . Будут ли точки A и B симметричны относительно прямой l ?
- Луч OQ — биссектриса угла AOB , а луч QO — биссектриса угла CQD (рис. 57). Укажите на этом рисунке точки, сим-

метричные относительно прямой OQ .
Имеет ли ось симметрии четырех-
угольник $OMQN$?

ЗАДАЧИ

62. Точки A и B симметричны относи-
тельно прямой l , а точки M и N при-
надлежат этой прямой. Будет ли
прямая l осью симметрии замкнутой
ломаной $AMBN$?
63. Луч m — биссектриса угла AOB ; пря-
мая p , перпендикулярная этой бис-
сектрисе, пересекает стороны угла в
точках M и N . Будут ли эти точки
симметричны относительно биссект-
рисы?
64. Окружность, центр которой принад-
лежит биссектрисе угла, пересекает
его стороны в точках A , B , C и D
(рис. 58).
Укажите точки, симметричные отно-
сительно биссектрисы.

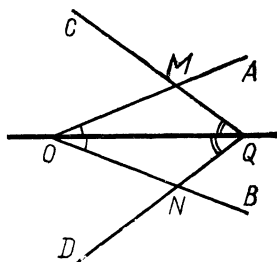


Рис. 57

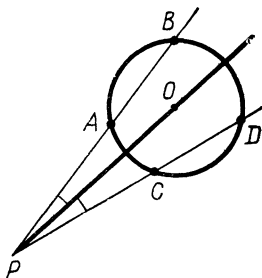


Рис. 58

65. Прямые l и m , перпендикулярные диаметру PQ окружности
 p , пересекают эту окружность в точках A , B и C , D .
Сделайте чертеж и убедитесь, что прямая PQ является осью
симметрии замкнутой ломаной $ABCD$.
66. Начертите треугольник F и проведите прямую l , пересе-
кающую две его стороны. Постройте и выделите цветным
карандашом фигуры $s(F)$, $F \cup s(F)$, $F \cap s(F)$, где s — симмет-
рия относительно прямой l . Какие из этих фигур имеют l
своей осью симметрии?

10. ПОНЯТИЕ О ТЕОРЕМЕ

В предыдущем пункте мы убедились, что диаметр, перпен-
дикулярный хорде, делит эту хорду пополам.

Проверить это можно было бы опытным путем: начертить
окружность, провести в ней хорду и перпендикулярный ей
диаметр, а затем, перегнув чертеж по диаметру, убедиться, что
половинки хорды совмещаются. Такую проверку можно было
бы повторить несколько раз для различных окружностей и хорд.
Однако справедливость этого утверждения в предыдущем пункте
была установлена не опытной проверкой, а рассуждением, кото-
рое убедило нас в том, что это высказывание справедливо для

любой окружности, любой хорды и перпендикулярного ей диаметра.

В дальнейшем часто будут встречаться высказывания, справедливость которых устанавливается при помощи рассуждений. Такие высказывания называют *теоремами*; рассуждение, которое убеждает в справедливости теоремы, называют *доказательством*.

Таким образом, высказывание «диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам» является теоремой.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Можно ли опытной проверкой убедиться в том, что диаметр, перпендикулярный *любой* хорде, делит ее пополам? В чем преимущество доказательства перед опытной проверкой?
- б) Рассмотрите высказывание «для любого натурального n число $4n^2 - 4n + 5$ — простое» и сделайте проверку этого высказывания для $n = 1; 2; 3$. Убеждает ли эта проверка в том, что сформулированное высказывание истинно?

ЗАДАЧИ

67. Возьмите три точки A, B, C , не лежащие на одной прямой, и проведите прямую l_1 , относительно которой симметричны точки A и B , затем прямую l_2 , относительно которой симметричны точки A и C , и, наконец, прямую l_3 , относительно которой симметричны точки B и C .
 - а) Доказали ли мы этим построением, что прямые l_1, l_2 и l_3 обязательно пересекаются в одной точке?
 - б) Можно ли это установить не опытным путем, а рассуждением?
68. На сторонах угла отложены от его вершины конгруэнтные отрезки OA и OB . Докажите, что точки A и B симметричны относительно биссектрисы этого угла.
69. Две окружности пересекаются в точках A и B . Докажите, что точки A и B симметричны относительно прямой, проходящей через центры этих окружностей.
70. На рисунке 59 $\widehat{MAB} = \widehat{NAB}$ и $\widehat{MBA} = \widehat{NBA}$. Докажите, что $(MN) \perp (AB)$.

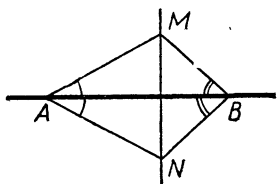


Рис. 59

71. Прямая l пересекает одну из двух концентрических окружностей в точках A и B , а вторую — в точках C и D . Докажите, что $[AC] \cong [BD]$ и $[AD] \cong [BC]$.

72. Докажите, что в равнобедренном треугольнике углы при основании конгруэнтны.

73. Начертите лучи AD и A_1D_1 , симметричные относительно прямой l . Возьмите на луче AD точку M и постройте на луче A_1D_1 такую точку M_1 , чтобы отрезки AM и A_1M_1 были конгруэнтны. Докажите, что точки M и M_1 симметричны относительно l .
74. Точки A, B, M и N таковы, что $|AM| = |BM|$ и $|AN| = |NB|$. Докажите, что точки A и B симметричны относительно прямой MN .
75. Докажите, что конгруэнтные окружности, пересекающиеся в точках A и B , симметричны относительно прямой AB . Сколько осей симметрии имеет фигура, представляющая собой объединение этих двух окружностей?

11. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

На рисунке 60 изображена прямая l и точка $A \notin l$. Из точки A проведены прямая p , перпендикулярная l , и прямые m_1, m_2, m_3 , не перпендикулярные l . Отрезок AP , где P — точка пересечения прямых p и l , называют *перпендикуляром* из точки A к прямой l . Отрезки AM_1, AM_2, AM_3 — *наклонные* из точки A к прямой l .

Теорема 1. *Если из одной точки проведены к прямой перпендикуляр и наклонная, то длина перпендикуляра меньше длины наклонной.*

Доказательство. Обозначим через d длину перпендикуляра $[AP]$, через q — длину наклонной $[AM]$ (рис. 61). Через B обозначим точку, симметричную A относительно прямой l . Тогда $|AP| = |PB| = d$ и $|AB| = 2d$. Далее, отрезки AM и BM симметричны относительно l . Следовательно, они конгруэнтны и потому имеют одинаковую длину: $|MB| = |MA| = q$. Таким образом, длина отрезка AB равна $2d$, а длина ломаной AMB равна $2q$.

Так как $M \notin [AB]$, то $|AM| + |MB| > |AB|$, т. е. $2q > 2d$. Отсюда следует, что $q > d$, т. е. $|AM| > |AP|$.

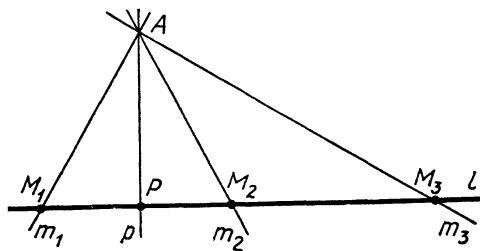


Рис. 60

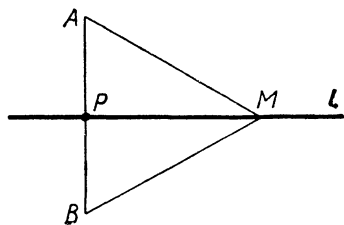


Рис. 61

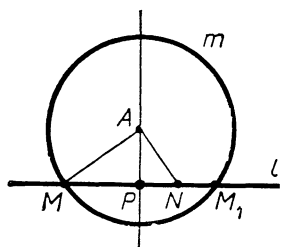


Рис. 62

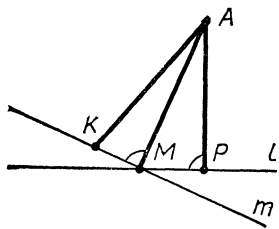


Рис. 63

Теорема 2. Пусть $[AP]$ — перпендикуляр к прямой l из точки $A \notin l$, а $[AM]$ и $[AN]$ — наклонные к l из той же точки. Если $|PN| < |PM|$, то $|AN| < |AM|$.

Эту теорему можно пояснить так: если точка $N \in l$ удаляется от точки P , то длина наклонной AN увеличивается.

Доказательство. Проведем через точку M окружность m с центром A . При симметрии s относительно прямой AP точка M перейдет во вторую точку пересечения прямой l с окружностью m , т. е. $s(M) = M_1$ (рис. 62). Точки M и M_1 находятся на одинаковом расстоянии от точки P , а точка N — на меньшем расстоянии от P . Поэтому точка N находится внутри отрезка MM_1 и, значит, внутри окружности m . Следовательно, $|AN| < |AM|$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Докажите, что длина каждого из катетов в прямоугольном треугольнике меньше длины гипотенузы.
- На рисунке 63 прямая l перпендикулярна отрезку AP , а прямая m перпендикулярна отрезку AM . Докажите, что $|AK| > |AP|$.
- Отрезок AM — наклонная из точки A к прямой l . Какие из следующих высказываний истинны: 1) длина любой наклонной из точки A к прямой l больше $|AM|$; 2) существует наклонная из точки A к прямой l , длина которой больше $|AM|$; 3) если длина перпендикуляра, проведенного к прямой l , больше $|AM|$, то он проведен не из точки A ?

ЗАДАЧИ

- Длина перпендикуляра из точки A к прямой l равна 5 см. Сколько существует на прямой l точек, удаленных от точки A на 6 см? Сделайте чертеж.
- Отрезки AN и NP перпендикулярны, $|AN| = 3$, $|AP| = 6$. Докажите, что пересечение фигур $l = \{M : |MA| = 7\}$ и $[NP]$ пусто.
- Из точки A проведены к прямой l перпендикуляр AP и наклонные AM , AN ; известно, что $|AN| = 6$, $|MN| = 7$. Докажите, что $M \notin [PN]$.
- Пусть $[AP]$ — перпендикуляр к прямой l из точки $A \notin l$, а $[AM]$ и $[AN]$ — наклонные. Докажите, что если $|AM| > |AN|$, то $|PM| > |PN|$.

80. На катетах прямоугольного треугольника взяты произвольные точки P и Q , не совпадающие с вершинами. Докажите, что $|PQ|$ меньше длины гипотенузы.

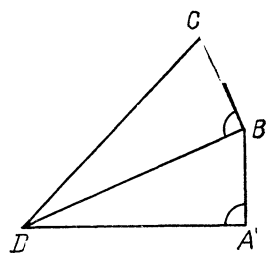


Рис. 64

81. В четырехугольнике $ABCD$ угол BCD прямой и $BD \perp AD$. Докажите, что $|AB| > |BC|$.

82. На рисунке 64 углы DAB и DBC прямые. Докажите, что $|AD| < |CD|$.

83. Докажите, что если в треугольнике ABC угол A тупой, то $[BC]$ — наибольшая сторона.

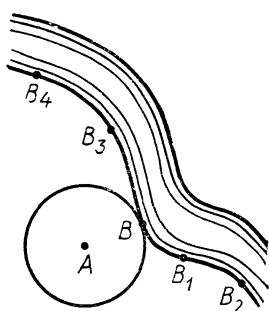


Рис. 65

12. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ФИГУРЫ

На рисунке 65 изображен лагерь туристов вблизи от реки (точка A). Туристу необходимо набрать в реке воды и вернуться к палатке. Наиболее коротким будет путь от точки A до ближайшей к ней точки берега. Другими словами, нужно отыскать на линии l (изображающей берег) такую точку B , что $|AB| \leq |AM|$ для любой точки $M \in l$. Искомая точка B обладает тем свойством, что внутри окружности с центром A и радиусом $|AB|$ нет ни одной точки линии l . Расстояние между точками A и B (рис. 65) принимается за расстояние от точки A до линии l .

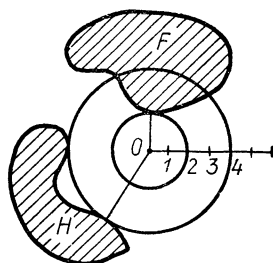


Рис. 66

Расстоянием от точки A до фигуры F называется расстояние от A до ближайшей к ней точки фигуры F , т. е. до такой точки $B \in F$, что $|AB| \leq |AM|$ для любой точки M фигуры F .

Расстояние от точки A до фигуры F обозначается через $d(A, F)$. На рисунке 66 расстояние от точки O до фигуры F равно 2, а расстояние от точки O до фигуры H равно 4:

$$d(O, F) = 2, \quad d(O, H) = 4.$$

Замечание. Ближайшей к A точки фигуры F может и не существовать. Например, если F — внутренняя область замкнутой линии l , а A — точка, лежащая во внешней области, то ближайшей точки не существует. В самом деле, какую бы точку $M \in F$ мы ни взяли, внутри линии l всегда найдется точка N , более близкая к A (рис. 67). Объясняется это тем, что фигура F не содержит своих граничных точек. В таких случаях присоединяют к фигуре F все ее граничные точки, определяют расстояние от точки A до получившейся фигуры $\bar{F}$ и считают, что $d(A, F) = d(A, \bar{F})$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

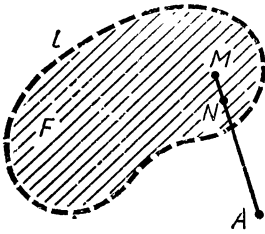


Рис. 67

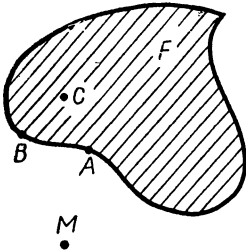


Рис. 68

- а) Докажите, что расстояние от точки A до прямой l равно длине перпендикуляра из точки A к прямой l .
- б) Фигура F представляет собой полуплоскость, границей которой является прямая l . Докажите, что если $A \notin F$, то $d(A, F) = d(A, l)$.
- в) Может ли в фигуре F существовать более чем одна ближайшая к A точка?
- г) Чему равно расстояние от точки O до фигуры $F = \{M : |OM| = 3\}$? До фигуры $K = \{M : |OM| \leq 3\}$?
- д) Даны точка A и фигуры F и P . Известно, что $d(A, F) = 5$, $d(A, P) = 3$. Что можно сказать о расстоянии от точки A до фигуры $F \cup P$?
- е) Расстояния от точки M (рис. 68) до точек A , B и C равны: $|MA| = 4$, $|MB| = 5$, $|MC| = 6$. Определите по чертежу, является ли какое-либо из этих чисел расстоянием от точки M до фигуры F .

ЗАДАЧИ

84. Чему равно расстояние от точки $(-3; 2)$: а) до оси x ; б) до оси y ?
85. Дан луч l с началом в точке O и точка A . Проведен перпендикуляр $[AM]$ к прямой, на которой лежит луч l . Докажите, что если $M \in l$, то $d(A, l) = |AM|$, а если $M \notin l$, то $d(A, l) = |AO|$.
86. Определите по рисунку 69 расстояние от точки M до луча OA .

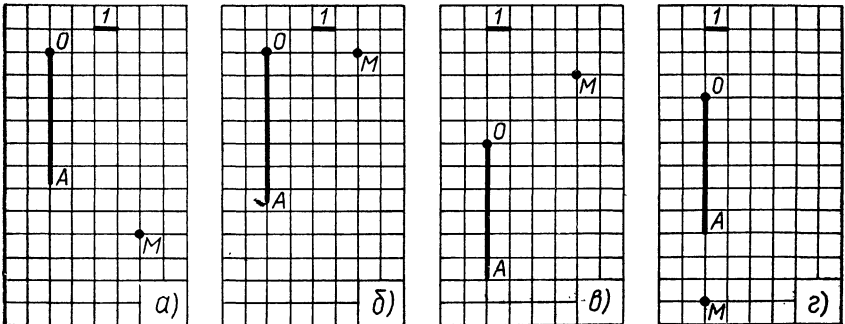


Рис. 69

87. Дан отрезок PQ и точка A . Проведен перпендикуляр $[AM]$ к прямой PQ . Докажите, что если $M \in [PQ]$, то $d(A, [PQ]) = |AM|$, а если $M \notin [PQ]$, то $d(A, [PQ])$ равно меньшему из двух чисел $|AP|$, $|AQ|$.

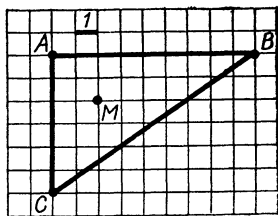


Рис. 70

88. Определите расстояние от точки M до замкнутой ломаной ABC (рис. 70).
89. а) Фигуры F и F_1 симметричны относительно прямой l . Докажите, что если $A \in l$, то $d(A, F) = d(A, F_1)$.
б) Используя высказывание а), докажите теоремы:
1. Если точки A и A_1 симметричны относительно прямой l , то для любой точки $M \in l$ справедливо равенство $|AM| = |A_1M|$.
2. Если точка M принадлежит биссектрисе угла, то она находится на одинаковом расстоянии от сторон этого угла.

90. Начертите луч l , не совпадающий с линией тетради, и возьмите точки A, B, C, D . Определите (в миллиметрах) расстояния $d(A, l)$, $d(B, l)$, $d(C, l)$, $d(D, l)$.

91. Определите по рисунку 71 расстояние от точки M до отрезка AB .

92. Начертите треугольник ABC по следующим данным (за единицу длины примите сантиметр):

а) $|BC| = 4$, $\hat{B} = 70^\circ$, $\hat{C} = 40^\circ$;

б) $|BC| = 4$, $\hat{B} = 110^\circ$, $\hat{C} = 30^\circ$;

в) $|BC| = 4$, $\hat{B} = 40^\circ$, $\hat{C} = 90^\circ$.

Определите расстояние от вершины A до отрезка BC в каждом из этих треугольников.

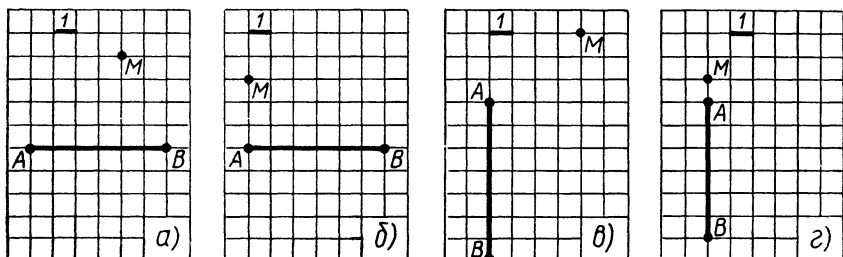
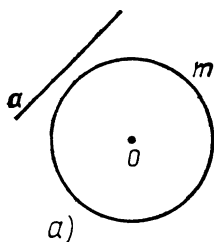
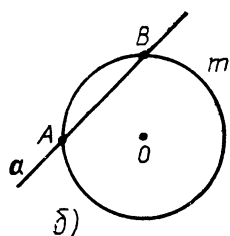


Рис. 71

13. КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ



Прямая линия может не иметь с окружностью ни одной общей точки (рис. 72, а), может иметь с ней две общие точки (рис. 72, б), а может — только одну (рис. 72, в). Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется *касательной* к этой окружности.



Теорема 1. *Прямая a , проведенная через точку A окружности l и перпендикулярная радиусу $[OA]$ этой окружности, является касательной к окружности l .*

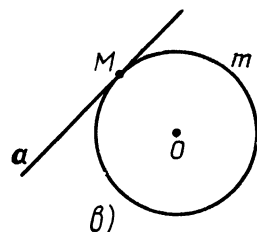


Рис. 72

Доказательство. Прямая a и окружность l , о которых идет речь, имеют общую точку A (рис. 73). Докажем, что эта общая точка единственная, т. е. что если M — отличная от A точка прямой a , то $M \notin l$. В самом деле, так как $(OA) \perp a$, то (OM) — наклонная из точки O к прямой a . Следовательно, $|OM| > |OA|$, т. е. $|OM|$ больше радиуса окружности, и поэтому $M \notin l$.

Теорема 2. *Радиус, проведенный в общую точку окружности и касательной, перпендикулярен касательной.*

Доказательство. Обозначим через A общую точку окружности l и касательной a (рис. 73). Любая отличная от A точка $M \in a$ лежит вне окружности, и поэтому $|OM| > |OA|$. Следовательно, A — ближайшая к центру O точка прямой a , и потому $[OA] \perp a$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

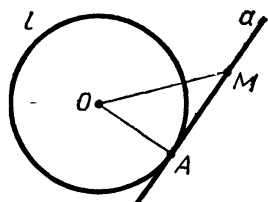


Рис. 73

- Что можно сказать о расстоянии от точки A до прямой a , если прямая a : 1) не пересекается с окружностью $l = \{M: |AM| = 3\}$; 2) касается окружности l ; 3) имеет с l две общие точки?
- Проведены окружность l с центром O и прямая b . Какие из следующих высказываний истинны: 1) если A — точка

- пересечения окружности l и прямой b , то $(OA) \perp b$; 2) если A — единственная точка пересечения окружности l и прямой b , то $(OA) \perp b$; 3) если b — касательная к l и радиус окружности l имеет общую точку с b , то этот радиус перпендикулярен прямой l ; 4) если прямая b перпендикулярна радиусу OA окружности l , то b касается этой окружности?
- в) Верно ли следующее высказывание: если прямая a касается окружности l и g — произвольное движение, то прямая $g(a)$ касается окружности $g(l)$?

ЗАДАЧИ

93. Дан прямоугольный треугольник ABC (B — вершина прямого угла). Докажите, что прямая BC касается окружности с центром A , проходящей через точку B .
94. Прямая a касается окружности l , а прямая m проходит через центр этой окружности. Докажите, что прямая a_1 , симметричная a относительно m , является касательной к l .
95. Докажите, что если окружность, центр которой лежит на биссектрисе угла, касается одной из сторон угла, то она касается и другой стороны этого угла.
96. Через точку A на окружности l с центром в точке K проведена касательная MN к этой окружности. Известно, что $|MA| = |NA|$. Докажите, что $|KM| = |KN|$.
97. Из точки M проведены две касательные к окружности; точки касания обозначены через A и B . Докажите, что: а) $[MA] \cong [MB]$; б) луч, проведенный из точки M через центр O окружности, является биссектрисой угла, образованного касательными; в) прямая MO перпендикулярна хорде $[AB]$ и делит ее пополам.
98. Докажите, что конгруэнтные окружности, касающиеся в точке H , симметричны относительно прямой, проведенной через точку H перпендикулярно прямой, проходящей через центры этих окружностей.
99. Отметьте точку O и постройте окружность $l = \{M : |OM| = 3\}$. Отметьте точку $B \in l$. Проведите прямую, касающуюся окружности l в точке B .
-
100. Проведите прямую a и отметьте точку $K \in a$. Постройте окружность радиуса 3, касающуюся прямой a в точке K .
101. Из внешней точки A проведена прямая, касающаяся в точке M окружности l с центром O . Зная, что $\widehat{MAO} = 25^\circ$, определите $\widehat{MOA}$.
102. На рисунке 74 все проведенные касательные проходят через одну точку O . Докажите, что $|OA| = |OD|$.

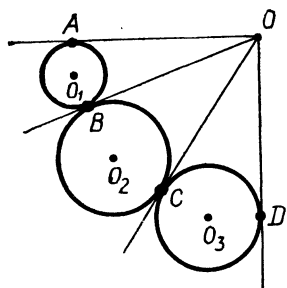


Рис. 74

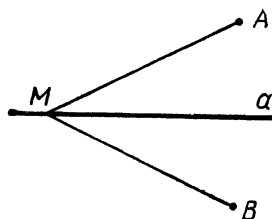


Рис. 75

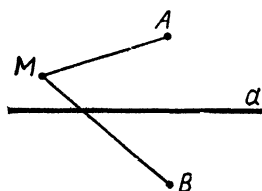


Рис. 76

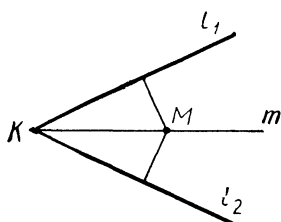


Рис. 77

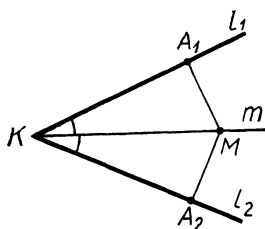


Рис. 78

14. СВОЙСТВО БИСSEKTRИСЫ УГЛА

Из курса 5 класса известно, что если точки A и B симметричны относительно прямой a , то всякая точка $M \in a$ (рис. 75) одинаково удалена от A и B , т. е. $|AM| = |MB|$. Если же $M \notin a$, то $|AM| \neq |MB|$ (рис. 76). Иными словами, ось симметрии a точек A и B есть множество всех точек, одинаково удаленных от A и B :

$$a = \{M : |AM| = |MB|\}. \quad (1)$$

Запись

$$l = \{M : |OM| = r\} \quad (2)$$

также дает пример задания фигуры (окружности) с помощью характеристического свойства точек.

Рассмотрим еще один пример. Обозначим через m множество всех точек, принадлежащих данному углу K и одинаково удаленных от его сторон l_1 и l_2 (рис. 77):

$$m = \{M : M \in \angle K \text{ и } d(M, l_1) = d(M, l_2)\}. \quad (3)$$

Фигура m должна обладать тем свойством, что любая ее точка, во-первых, принадлежит углу K и, во-вторых, одинаково удалена от его сторон. При этом m — множество *всех* точек, обладающих свойством

$$M \in \angle K \text{ и } d(M, l_1) = d(M, l_2),$$

т. е. никакая точка, не принадлежащая множеству m , не обладает этим свойством.

Следующая теорема показывает, что если угол K меньше развернутого, то искомого множества m есть биссектриса этого угла.

Теорема. Если угол меньше развернутого, то множество всех точек этого угла, одинаково удален-

ных от его сторон, есть биссектриса этого угла.

Доказательство. Обозначим через l_1 и l_2 стороны угла K , а через m биссектрису.

Пусть $M \in m$. Так как лучи l_1 и l_2 симметричны относительно m , то $d(M, l_1) = d(M, l_2)$ (рис. 78).

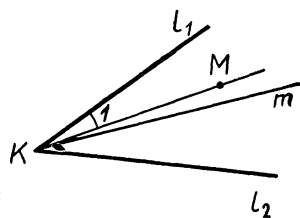


Рис. 79

Пусть теперь точка M угла K не принадлежит биссектрисе m , т. е. луч KM не совпадает с m (рис. 79). Угол 1 острый, так как он меньше половины угла K , а угол K меньше развернутого. Обозначим через l луч, симметричный лучу l_1 относительно (KM) . Луч l расположен внутри угла K (рис. 80). Проведем перпендикуляр MQ к прямой a , на которой лежит луч l . Так как угол 2 острый, то $Q \in l$ и поэтому

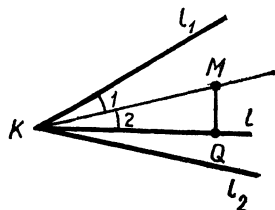


Рис. 80

$$d(M, l_1) = d(M, l) = |MQ|.$$

Рассмотрим ту полуплоскость P , определяемую прямой a , которая не содержит точки M (рис. 81). Любая отличная от Q точка полуплоскости P находится от M на расстоянии больше, чем $|MQ|$. В частности, любая точка луча l_2 находится от M на расстоянии больше, чем $|MQ|$, т. е. $d(M, l_2) > |MQ|$ и потому $d(M, l_2) > d(M, l_1)$.

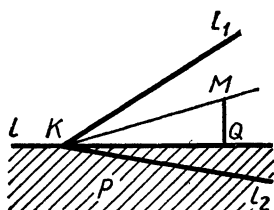


Рис. 81

Итак, если $M \in m$, то $d(M, l_1) = d(M, l_2)$, а если $M \notin m$, то $d(M, l_1) \neq d(M, l_2)$. Теорема доказана.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

а) Дана прямая a и точка A на ней. Сколько можно провести окружностей касающихся прямой a в точке A ? Что представляет собой множество всех центров окружностей, касающихся прямой a в точке A ?

б) Какие из следующих высказываний истинны (рис. 82, 83): 1) если угол K больше развернутого, то любая точка его биссектрисы одинаково удалена от сторон угла; 2) если угол K больше развернутого, то существует внутри этого угла точка, одинаково удаленная от сторон, но не принадлежащая его биссектрисе; 3) если угол K

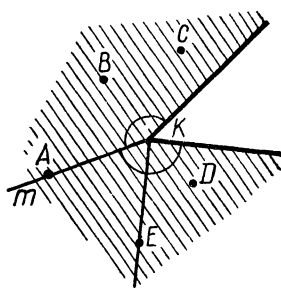


Рис. 82

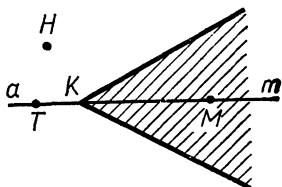


Рис. 83

больше развернутого, то любая точка этого угла, одинаково удаленная от сторон угла, принадлежит его биссектрисе; 4) если угол K меньше развернутого, то любая точка, одинаково удаленная от сторон угла, принадлежит биссектрисе этого угла; 5) если угол K меньше развернутого, то любая точка, одинаково удаленная от его сторон, принадлежит прямой, на которой лежит биссектриса?

ЗАДАЧИ

103. На сторонах угла K отложены конгруэнтные отрезки KA и KB ; точка M — середина отрезка AB . Докажите, что точка M одинаково удалена от сторон угла.
104. Точка M — середина катета BC прямоугольного треугольника ABC . Принадлежит ли точка M биссектрисе угла BAC ?
105. Дан угол, меньший развернутого. Окружность вписана в этот угол, т. е. касается его сторон. Докажите, что центр окружности принадлежит биссектрисе угла.
106. В треугольнике ABC проведены биссектрисы углов A и B . Докажите, что точка их пересечения одинаково удалена от всех трех сторон треугольника ABC .
107. Найдите множество всех точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых.

-
108. Впишите в угол, меньший развернутого, окружность с центром в точке O , принадлежащей биссектрисе этого угла.
 109. Из точки A , лежащей вне окружности, проведены луч l_1 , касающийся окружности, и луч l_2 , пересекающий ее в двух точках. Принадлежит ли центр окружности биссектрисе угла между лучами l_1 и l_2 ?
 110. На рисунке 84 лучи l_1 и l_2 являются биссектрисами углов A и B . Докажите, что существует окружность с центром O , касающаяся всех трех прямых MA , AB , BN .

15. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

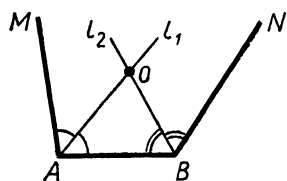


Рис. 84

Задача. Даны три точки H , P и T . Найдите точку M , равноудаленную от точек H и P и находящуюся на расстоянии 3 от точки T (если таких точек несколько, то найдите их все).

Решение. Искомая точка M должна, во-первых, находиться на одинаковом расстоянии от точек H и P , т. е.

$$|HM| = |PM|, \quad (1)$$

и, во-вторых, должна быть удалена от T на расстояние 3, т. е.

$$|TM| = 3. \quad (2)$$

Значит, точка M должна одновременно обладать свойствами (1) и (2).

Множество всех точек, обладающих свойством (1), как мы знаем, есть прямая l , относительно которой точки H и P симметричны. Множество всех точек, обладающих свойством (2), есть окружность m с центром T и радиусом 3. Искомая точка должна принадлежать пересечению этих двух множеств:

$$M \in l \cap m.$$

На рисунке 85 это пересечение состоит из двух точек M_1 и M_2 . Так как $M_1 \in l$, то $|HM_1| = |PM_1|$, а так как, кроме того, $M_1 \in m$, то $|TM_1| = 3$. Это означает, что точка M_1 удовлетворяет требованиям задачи. Точно так же удовлетворяет требованиям задачи и точка M_2 .

В зависимости от расположения точек H , P и T требованиям задачи могут удовлетворять две точки (это будет, если окружность m пересекается с прямой l в двух точках, рис. 85), одна точка (если прямая l касается окружности m , рис. 86) или ни одной точки (если прямая l и окружность m не имеют общих точек, рис. 87).

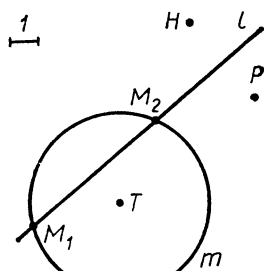


Рис. 85

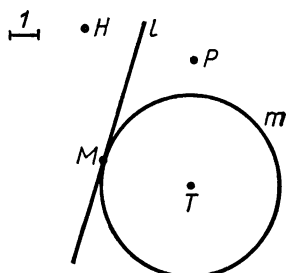


Рис. 86

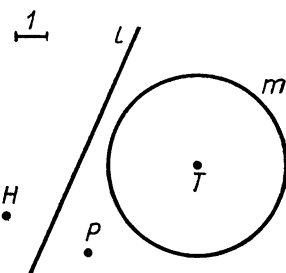


Рис. 87

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Даны две точки A и B и фигура F . Как найти множество всех точек фигуры F , которые одинаково удалены от точек A и B ?
- Фигура F расположена внутри угла K , меньшего чем развернутый. Как найти множество всех точек фигуры F , которые одинаково удалены от сторон угла K ?

ЗАДАЧИ

- Постройте на прямой a точку M , равноудаленную от точек P и T . Рассмотрите разные случаи взаимного расположения прямой a , точек P и T .

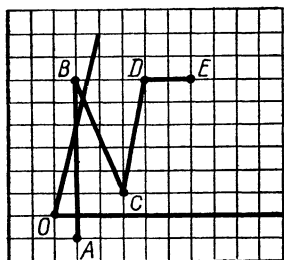


Рис. 88

112. Найдите множество всех точек круга K , одинаково удаленных от двух данных точек P и R . Каким может быть это множество при различных случаях взаимного расположения круга K и точек P и R ?
113. Возьмите угол K и точки A и B . Найдите множество всех точек $M \in \angle K$, одинаково удаленных от сторон угла и, кроме того, одинаково удаленных от точек A и B .
114. Впишите окружность в треугольник ABC , т. е. постройте окружность, которая касается всех сторон этого треугольника.
115. Возьмите точки A, B, H и P . Постройте все точки M , для которых
- $$|AM| = |BM| \text{ и } |HM| = |PM|.$$
116. Возьмите точки A, B и C , не лежащие на одной прямой, и постройте точку, одинаково удаленную от точек A, B и C .
-
117. Постройте на отрезке AB точку K , равноудаленную от точек H и P . Рассмотрите различные случаи взаимного расположения отрезка AB , точек H и P .
118. Скспируйте в тетрадь фигуру, изображенную на рисунке 88. Найдите множество всех точек ломаной $ABCDE$, одинаково удаленных от сторон острого угла с вершиной O .
119. Начертите треугольник и опишите около него окружность, т. е. постройте окружность, проходящую через каждую из его вершин.

16. ЗНАК ОБЩНОСТИ

Часто приходится формулировать высказывания, в которых используются слова «все», «всякий», «каждый», «любой» и т. п. В математике принято вместо этих слов использовать знак $\forall$ (перевернутая первая буква «А» английского слова *All* — все), который называется *знаком общности*.

Рассмотрим следующие два утверждения:

сумма величин углов треугольника ABC равна 180° ; (1)

в треугольнике ABC угол A прямой. (2)

Чтобы подчеркнуть общность утверждения (1), т. е. его справедливость для *любого* треугольника ABC , используется знак $\forall$:

$$(\forall \triangle ABC) (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ).$$

Читается: «для любого треугольника ABC сумма величин углов A , B и C равна 180° ». Это — истинное высказывание.

Утверждение (2) такой общностью не обладает. И если перед этим утверждением записать $(\forall \triangle ABC)$, то получается ложное высказывание. Например, в треугольнике, изображенном на рисунке 89, угол A не прямой.

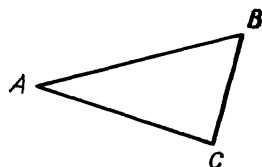


Рис. 89

Вот еще пример:

$$(\forall \text{т. } A, B, C) (|AB| + |BC| \geq |AC|).$$

Знак общности в этой записи показывает, что неравенство треугольника $|AB| + |BC| \geq |AC|$ справедливо для любых точек A , B и C , а обозначение «т.» — сокращение слова «точка» (в дальнейшем для сокращения слова «прямая» будет применяться обозначение «пр.»).

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

а) Какие из следующих высказываний истинны:

- 1) $(\forall \triangle ABC)$ (треугольник ABC имеет ось симметрии);
- 2) $(\forall \triangle ABC) (|AB| < |AC| + |BC|)$;
- 3) $(\forall \triangle ABC)$ (хотя бы один из углов A , B , C тупой);
- 4) $(\forall \triangle ABC)$ (хотя бы один из углов A , B , C острый)?

б) Какие из следующих высказываний истинны:

- 1) $(\forall \text{т. } M, N, P) (|MN| + |NP| = |MP|)$;
- 2) $(\forall \text{т. } M, N, P) (|MN| + |NP| > |MP|)$;
- 3) $(\forall \text{т. } M, N, P) (|MN| + |NP| \geq |MP|)$;
- 4) $(\forall F, g, \text{ где } F \text{ — фигура, } g \text{ — движение}) (F \cong g(F))$?

ЗАДАЧИ

120. Запишите, используя знак общности, следующие высказывания. Какие из этих высказываний истинны:

- а) каков бы ни был параллельный перенос h , он является движением;
- б) каково бы ни было движение h , оно является параллельным переносом?

121. Запишите, используя знак общности:

- а) расстояние от любой точки A до любой фигуры F — число неотрицательное;
- б) расстояние от любой точки A до фигуры F не меньше, чем расстояние от точки A до фигуры $F \cup H$.

122. Какие из следующих высказываний истинны:

- а) $(\forall \text{т. } A, B, C, D) (|AB| + |BC| + |CD| \geq |AD|)$;

- б) $(\forall t. O; r_1 > 0, r_2 > 0) (\{M: |OM| = r_1\} \cap \{M: |OM| = r_2\} = \emptyset)$;
 в) $(\forall t. A, B, C, D) ([AB] \cap [CD] = \emptyset)?$

123. Запишите, используя знак общности, следующие высказывания. Какие из этих высказываний истинны:

- а) любое движение h есть осевая симметрия;
 б) любая осевая симметрия h есть движение?

124. Какие из следующих высказываний истинны? Подтвердите свой вывод чертежом:

- а) $(\forall P, Q, \text{ где } P, Q \text{ — полуплоскости}) (P \cap Q \text{ есть угол, больший развернутого});$
 б) $(\forall P, Q, \text{ где } P, Q \text{ — полуплоскости}) (P \cup Q \text{ есть угол, больший развернутого}).$

17. СТРУКТУРА ТЕОРЕМЫ

В формулировках теорем, как правило, встречаются слова «если...», «то...», «из... следует...», «из... вытекает...» и т. д. В этих случаях для сокращения записи используют знак $\Rightarrow$.

Возьмем в качестве примера теорему: каковы бы ни были точки A, B и M , если расстояние от точки M до точек A и B одинаково, то M принадлежит оси симметрии точек A и B . Используя знаки $\forall$ и $\Rightarrow$, эту теорему можно записать следующим образом:

$(\forall t. A, B, M) (|AM| = |BM|) \Rightarrow (M \text{ принадлежит оси симметрии точек } A \text{ и } B).$

Аналогичным образом могут быть записаны и другие теоремы: сначала ставится *разъяснительная часть* теоремы, т. е. запись вида $(\forall \triangle ABC)$, $(\forall t. A, B, M)$, $(\forall F, g, \text{ где } F \text{ — фигура, } g \text{ — движение})$ и т. п., а затем пишутся два утверждения, соединенные знаком $\Rightarrow$. Первое из этих утверждений (стоящее после разъяснительной части и перед знаком $\Rightarrow$) называется *условием* теоремы, второе (стоящее после знака $\Rightarrow$) называется *заключением* теоремы. Например, одно из свойств равнобедренного треугольника может быть записано в виде следующей теоремы:

$(\forall \triangle ABC) ([AB] \cong [CB]) \Rightarrow (\angle BAC \cong \angle BCA).$

Здесь *разъяснительная часть* состоит в том, что рассматривается любой треугольник, вершины которого обозначены буквами A, B и C . Запись $[AB] \cong [CB]$ выражает условие теоремы (в рассматриваемом треугольнике ABC стороны AB и CB конгруэнтны). Запись $\angle BAC \cong \angle BCA$ выражает заключение теоремы (углы при основании конгруэнтны).

Нередко эту теорему кратко формулируют так: в равнобедренном треугольнике углы при основании конгруэнтны. Здесь подразумевается (но явно это не высказано), что теорема имеет

общий смысл, т. е. в любом треугольнике, если только $[AB] \cong [CB]$, то обязательно и $\angle BAC \cong \angle BCA$. Общий характер этой теоремы явно указан в записи $(\forall \triangle ABC)$.

Часто разъяснительная часть теоремы начинается словом «пусть», а переход к условию теоремы отмечается словом «тогда». Вот как в этом случае формулируются теоремы, рассмотренные выше.

а) Пусть A, B, M — три произвольные точки; тогда если расстояние от точки M до точек A и B одинаково, то M принадлежит оси симметрии точек A и B .

б) Пусть ABC — произвольный треугольник; тогда если стороны AB и CB конгруэнтны, то углы BAC и BCA конгруэнтны.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

Сформулируйте словами каждую из следующих теорем; укажите разъяснительную часть, условие и заключение:

- а) $(\forall \text{т. } A, B, M) (M \in [AB]) \Rightarrow (|AM| + |BM| = |AB|)$;
- б) $(\forall \text{т. } A, B, M) (|AM| + |BM| = |AB|) \Rightarrow (M \in [AB])$;
- в) $(\forall \text{т. } A, B, D; \text{ пр. } l, \text{ где } A \in l, B \in l, D \notin l, A \neq B) ([DB] \perp l) \Rightarrow (|DB| < |DA|)$.

ЗАДАЧИ

125. Какие из следующих высказываний истинны:

- а) $(\forall \angle A, \angle B) (\angle A \cong \angle B) \Rightarrow (\angle A \text{ и } \angle B \text{ вертикальные})$;
- б) $(\forall \angle A, \angle B) (\angle A \text{ и } \angle B \text{ вертикальные}) \Rightarrow (\angle A \cong \angle B)$;
- в) $(\forall \angle A, \angle B) (\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ) \Rightarrow (\angle A \text{ и } \angle B \text{ смежные})$;
- г) $(\forall \angle A, \angle B) (\angle A \text{ и } \angle B \text{ смежные}) \Rightarrow (\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ)$?

126. Укажите разъяснительную часть, условие и заключение в следующих теоремах. Докажите эти теоремы:

- а) $(\forall \triangle ABC) (|AB| = |BC|) \Rightarrow (\text{биссектриса угла } B \text{ есть ось симметрии треугольника } ABC)$;
- б) $(\forall \triangle ABC, \text{ т. } D, \text{ где } D \text{ — середина } [BC]) (|AB| = |AC|) \Rightarrow ((AD) \text{ — ось симметрии треугольника } ABC)$;
- в) $(\forall \triangle ABC) (|AB| = |AC|) \Rightarrow (\text{ось симметрии точек } B \text{ и } C \text{ есть ось симметрии треугольника } ABC)$.

127. Сформулируйте словами следующую теорему и докажите ее: $(\forall \triangle ABC) ([AB] \cong [BC] \cong [AC]) \Rightarrow (\hat{A} = \hat{B} = \hat{C})$.

128. Запишите с помощью знаков $\forall, \Rightarrow$ следующую теорему и докажите ее.

Пусть D — середина стороны AC треугольника ABC ; тогда если $|AD| = |BD|$, то $\hat{B} = 90^\circ$.

129. Докажите следующие теоремы:

- а) $(\forall \triangle ABC) (\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}) \Rightarrow (\hat{A} = 90^\circ)$;
- б) $(\forall \triangle ABC) ([AB] \cong [BC]) \Rightarrow (\widehat{BAC} < \angle 90^\circ)$.

18. ПОВОРОТ

В математике направление поворота против часовой стрелки принимают за *положительное*, а направление по часовой стрелке — за *отрицательное*. На рисунке 90 луч OB_1 получается поворотом луча OA на $+110^\circ$, а луч OB_2 получается поворотом луча OA на -110° . Можно также сказать, что луч OB_1 получен из луча OA поворотом на 470° (или, скажем, на 830°): ведь поворот на 360° совмещает луч OA с самим собой, а $470^\circ = 360^\circ + 110^\circ$.

Пусть теперь O — точка плоскости. Выберем произвольную точку A и проведем луч l , получающийся поворотом луча OA на -50° вокруг точки O (рис. 91). На луче l отложим отрезок OA_1 , конгруэнтный отрезку OA . Говорят, что точка A_1 получается из точки A поворотом на -50° вокруг точки O . По этому правилу для любой точки плоскости можно найти точку, в которую она переходит в результате указанного поворота. Точка O остается на месте (т. е. переходит в себя). Получающееся отображение плоскости на себя называется поворотом на -50° вокруг точки O .

Аналогично определяется поворот на любой угол.

Поворот является движением: если A_1 и B_1 — точки, в которые переходят точки A и B при повороте, то $|AB| = |A_1B_1|$. Пояснить это наглядно можно следующим образом. Будем представлять плоскость в виде наложенных один на другой листов, которые скреплены в точке O . Повернув верхний лист вокруг O , мы увидим как первоначальное положение фигуры (на нижнем листе), так и новое ее положение (рис. 92). Эта наглядная модель поясняет, что при повороте расстояние между точками не изменяется, а каждая фигура переходит в конгруэнтную ей.

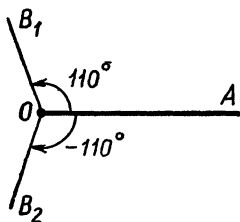


Рис. 90

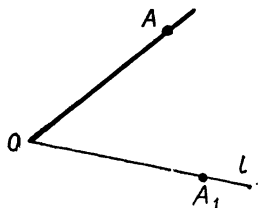


Рис. 91

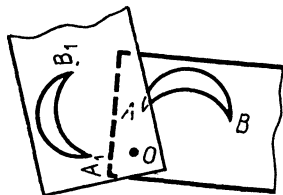


Рис. 92

На рисунке 93 окружность разделена точками $A_1, A_2, \dots, A_8$ на 8 конгруэнтных дуг. При повороте вокруг точки O на угол $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ точка A_1 перейдет в A_2 , A_2 — в A_3 и т. д., т. е. многоугольник $A_1 A_2 \dots A_8$ перейдет в тот же самый многоугольник. Отсюда следует, что $[A_1 A_2] \cong [A_2 A_3] \cong \dots \cong [A_8 A_1]$, т. е. все стороны многоугольника конгруэнтны между собой. Точно так же конгруэнтны все углы многоугольника:

$$\angle A_1 \cong \angle A_2 \cong \dots \cong \angle A_8.$$

Многоугольник, у которого все стороны конгруэнтны между собой и все углы также конгруэнтны между собой, называется *правильным многоугольником*. Таким образом, на рисунке 93 изображен правильный восьмиугольник. Равносторонний треугольник и квадрат также являются примерами правильных многоугольников.

Вообще, если M — правильный многоугольник, имеющий n вершин (т. е. *правильный n -угольник*), то внутри многоугольника M существует такая точка O , что при повороте вокруг этой точки на угол $\frac{360^\circ}{n}$ многоугольник M переходит в себя (рис. 94). Из этой теоремы (мы ее доказательство не рассматриваем) следует, что все вершины находятся на одинаковом расстоянии от точки O , т. е. центра окружности, проходящей через все вершины многоугольника M (она называется описанной окружностью правильного многоугольника M).

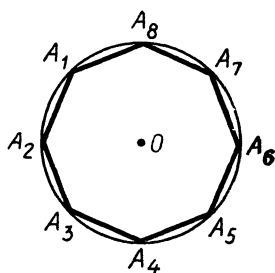


Рис. 93

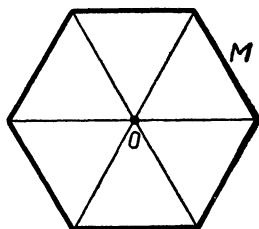


Рис. 94

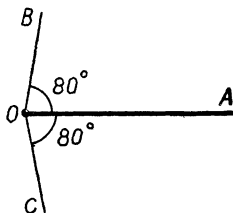


Рис. 95

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Какой из лучей на рисунке 95 получен поворотом луча OA на: 1) 80° ; 2) -80° ; 3) 280° ?
- Луч t получен из луча l поворотом на -30° . Лучи l_1 , m_1 симметричны лучам l , t относительно прямой a . Поворотом на какой угол получается луч m_1 из луча l_1 ?
- На рисунке 96 точка A_1 получается из точки A поворотом вокруг точки O на угол -40° , углы 1 и 2 прямые. Можно ли утверждать, что прямая l_1 получается из l поворотом вокруг точки O на -40° ?

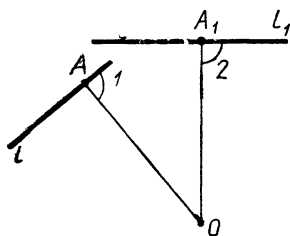


Рис. 96

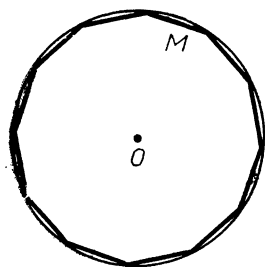


Рис. 97

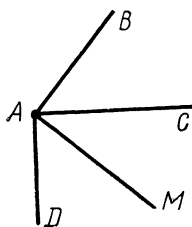


Рис. 98

г) Докажите, что поворот на 180° вокруг точки O есть центральная симметрия.

д) Точка O — центр описанной окружности правильного двенадцатиугольника M (рис. 97). Переходит ли многоугольник M в себя при повороте вокруг точки O на угол -30° ? На угол 15° ? На угол 60° ?

е) Какие из следующих высказываний истинны: 1) для всякого треугольника существует описанная окружность; 2) для всякого многоугольника существует описанная окружность; 3) для всякого правильного многоугольника существует описанная окружность?

ЗАДАЧИ

130. Запишите с помощью знаков $\forall$, $\Rightarrow$ следующую теорему и докажите ее. Пусть l — окружность с центром O , а A, B, C, D — точки этой окружности; тогда если углы AOB и COD конгруэнтны, то хорды AB и CD находятся на одинаковом расстоянии от центра.

131. Стороны углов BAC и MAD взаимно перпендикулярны ($AB \perp AM, AC \perp AD$) и расположены так, как показано на рисунке 98. Докажите, что $\angle BAC \cong \angle MAD$.

132. Треугольник $A_1B_1C_1$ получен из треугольника ABC поворотом на угол -90° вокруг точки O . Сделайте чертеж. Докажите, что биссектриса угла A_1 треугольника $A_1B_1C_1$ перпендикулярна биссектрисе угла A треугольника ABC .

133. Начертите произвольный треугольник ABC . Примите вершину A за центр поворота и выполните поворот треугольника ABC на 180° . Какое название имеет такой поворот?

134. В окружности проведены радиусы OA, OB, OC, OD таким образом, что $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$. Докажите, что $|AB| = |CD|$.

135. Докажите следующие утверждения:

- а) правильный пятиугольник имеет пять осей симметрии;
- б) правильный шестиугольник имеет шесть осей симметрии.

136. Отметьте точки O, A и B , не лежащие на одной прямой, и постройте отрезок A_1B_1 , в который переходит отрезок AB

при повороте вокруг точки O на -45° . Сравните длины отрезков AB и A_1B_1 .

137. Начертите треугольник и отметьте вне его точку O . Выполните поворот треугольника вокруг точки O на угол 60° .
 138. Докажите, что сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса r , имеет длину r .

19. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ПРЯМЫХ

Центральная симметрия есть движение. Поэтому (см. п. 7) две фигуры, симметричные относительно некоторой точки, конгруэнтны. Далее, при центральной симметрии, как и при любом движении, сохраняется пересечение, а также и объединение фигур.

Следующая теорема указывает еще одно важное свойство центральной симметрии.

Теорема. *Прямая b , симметричная прямой a относительно точки O , параллельна a .*

Эту теорему можно записать так:

($\forall$ пр. a, b ; т. O ; r , где r — симметрия относительно O)

$$(b = r(a)) \Rightarrow (b \parallel a),$$

т. е. можно взять любые прямые a, b и любую точку O и тогда, если только прямая b симметрична прямой a относительно O , то $b \parallel a$.

Доказательство. Рассмотрим отдельно два случая: $O \notin a$, $O \in a$.

а) Пусть $O \notin a$ (рис. 99, а). Докажем, что в этом случае прямая $b = r(a)$ не имеет общих точек с прямой a . Действительно, для любой точки $N \in b$ симметричная ей точка $M = r(N)$ принадлежит прямой a . Поэтому точка N не принадлежит прямой a (если бы $N \in a$, то и весь отрезок MN принадлежал бы прямой a и получалось бы, что и O принадлежит прямой a , что неверно). Итак, какую бы точку $N \in b$ мы ни взяли, она не принадлежит прямой a . Значит, прямые b и a не имеют общих точек и потому параллельны.

б) Пусть теперь $O \in a$ (рис. 99, б). Тогда каждая точка M прямой a переходит в точку N той

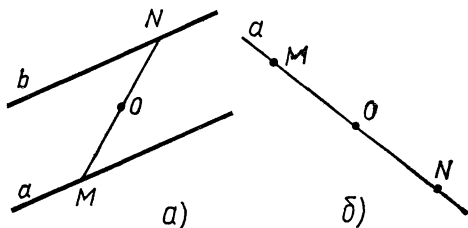


Рис. 99

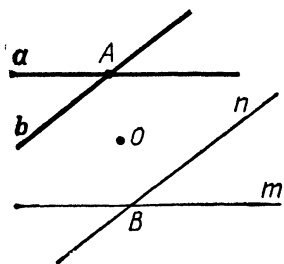


Рис. 100

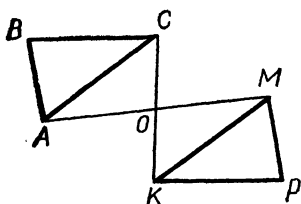


Рис. 101

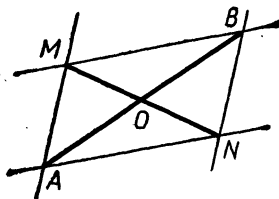


Рис. 102

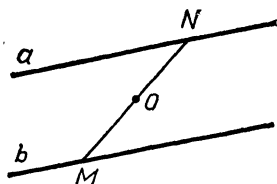


Рис. 103

же прямой. Иначе говоря, $a = r(a)$, т. е. прямые a и $b = r(a)$ совпадают. Остается вспомнить, что каждая прямая параллельна сама себе, так что и в этом случае $b \parallel a$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Прямые a и b пересекаются в точке A (рис. 100); при центральной симметрии r они переходят в прямые $m = r(a)$ и $n = r(b)$, пересекающиеся в точке B . Докажите, что $B = r(A)$.
- На рисунке 101 треугольники ABC и MPK симметричны относительно точки O . Найдите на этом чертеже параллельные прямые.
- На рисунке 102 точка O — общая середина отрезков AB и MN . Можно ли утверждать, что $(MA) \parallel (BN)$? Какие еще параллельные прямые можно указать на этом чертеже?
- На рисунке 103 прямые a и b параллельны, O — середина отрезка MN . Можно ли утверждать, что при симметрии относительно O прямая a переходит в прямую b ? Почему?

ЗАДАЧИ

- Прямые a и b пересекаются в точке O . На прямой a отложены конгруэнтные отрезки OP и OT ; на прямой b отложены конгруэнтные отрезки ON и OK . Определите расстояние между точками N и P , если $|TK| = 4,5$ см.
- Луч PT симметричен лучу MK относительно точки O . На лучах PT и MK отложены конгруэнтные отрезки PA и MB . Докажите, что точки A и B симметричны относительно точки O .
- Окружности m_1 и n_1 пересекаются в точках A_1 и B_1 . При симметрии относительно точки O они переходят в окружности m_2 и n_2 , пересекающиеся в точках A_2 и B_2 . Докажите, что прямые A_1B_1 и A_2B_2 параллельны.

142. Докажите, что если два конгруэнтных отрезка параллельны, то существует точка, относительно которой эти отрезки симметричны.

143. Докажите, что в правильном десятиугольнике имеется 5 пар параллельных сторон.

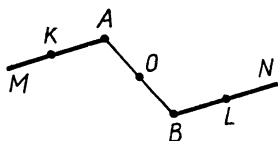


Рис. 104

144. Окружности m и n имеют общий центр. В окружности m проведен диаметр AB , в окружности n — диаметр PK . Докажите, что $(AP) \parallel (BK)$ и $(AK) \parallel (BP)$.

145. На рисунке 104 точка O — середина отрезка AB , лучи AM и BN параллельны, $[AK] \cong [BL]$. Докажите, что $(BK) \parallel (AL)$.

146. Докажите, что правильный шестиугольник имеет центр симметрии.

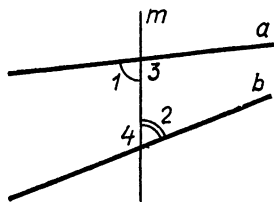


Рис. 105

20. НАКРЕСТ ЛЕЖАЩИЕ УГЛЫ

При пересечении двух прямых a и b третьей прямой m (рис. 105) образуется несколько углов. Углы 1 и 2 называются *накрест лежащими*. Углы 3 и 4 тоже накрест лежащие.

Теорема. Накрест лежащие углы, образованные при пересечении двух не совпадающих параллельных прямых третьей прямой, конгруэнтны.

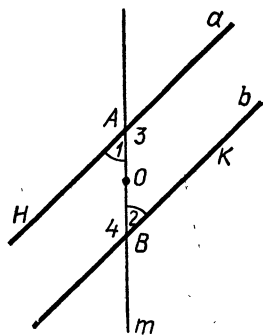


Рис. 106

При доказательстве будет использоваться тот факт, что через любую точку плоскости проходит единственная прямая, параллельная данной прямой.

Доказательство. Пусть a и b — две параллельные прямые, пересеченные третьей прямой m (рис. 106). При симметрии r относительно середины O отрезка AB прямая a переходит в прямую $r(a)$, которая параллельна a и проходит через точку B . Так как через точку B проходит единственная прямая, параллельная a , то $r(a) = b$. При симметрии r точка A переходит в B , луч AN — в луч BK , и потому угол 1 переходит в угол 2. Следовательно, эти углы конгруэнтны. По той же причине $\angle 3 \cong \angle 4$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

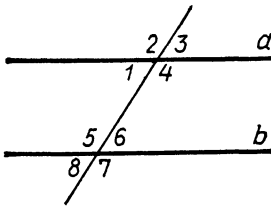


Рис. 107

- а) На рисунке 107 прямые a и b параллельны. Какие из указанных на рисунке углов конгруэнтны углу 1? Какие конгруэнтны углу 2?
- б) Известно, что $a \parallel b$, $p \parallel q$ (рис. 108). Величина угла 1 равна 107° . Найдите величину угла 9.

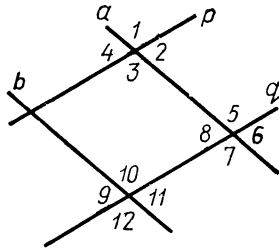


Рис. 108

ЗАДАЧИ

147. Докажите (при обозначениях, указанных на рис. 107), что:

- а) $\hat{5} + \hat{1} = 180^\circ$;
- б) $\hat{6} + \hat{4} = 180^\circ$;
- в) $\hat{3} = \hat{6}$;
- г) $\hat{3} + \hat{7} = 180^\circ$.

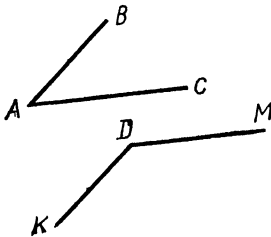


Рис. 109

148. На рисунке 107 прямые a и b параллельны, $\hat{5} - \hat{1} = 70^\circ$. Определите величины углов 1, ..., 8.

149. На рисунке 109 $(AB) \parallel (DK)$, $(AC) \parallel (DM)$. Зная, что $\widehat{BAC} = 58^\circ$, определите $\widehat{KDM}$.

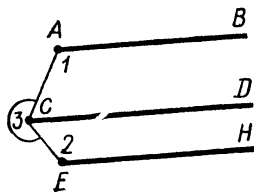


Рис. 110

150. Лучи AB , CD и EH (рис. 110) параллельны, причем $\hat{1} = 110^\circ$, $\hat{2} = 120^\circ$. Определите величину угла 3.

151. Лучи AB и CD (рис. 111) параллельны. Определите угол, меньший развернутого, вершиной которого служит точка H , если $\hat{1} = 120^\circ$ и $\hat{2} = 60^\circ$.

152. Проведите через вершину треугольника прямую, параллельную противоположной стороне. Пользуясь этим чертежом, докажите, что сумма величин внутренних углов треугольника равна 180° .

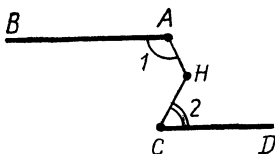


Рис. 111

153. Лучи AB , CD и EH на рисунке 112 параллельны, $\hat{1} = 40^\circ$, $\hat{2} = 30^\circ$. Определите величины углов 3, 4, 5.

154. Определите величину угла 1 (рис. 113), если лучи BA и DE параллельны, $\widehat{ABC} = 110^\circ$ и $\widehat{CDE} = 130^\circ$.

155. Величина угла 2 на рисунке 114 в четыре раза больше величины угла 1. Определите величины этих углов, если прямые a и b параллельны.

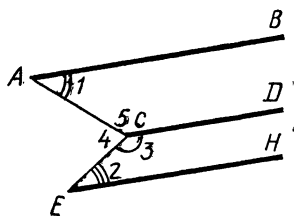


Рис. 112

21. ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА

Следующая теорема выражает одно из свойств равнобедренного треугольника:

$(\forall \triangle ABC) ([AC] \cong [BC]) \Rightarrow$ (биссектриса угла C — ось симметрии треугольника ABC). (1)

Поменяем местами условие и заключение этой теоремы, оставив без изменения разъяснительную часть. Мы получим новую теорему:

$(\forall \triangle ABC)$ (биссектриса угла C — ось симметрии треугольника ABC) $\Rightarrow$ $[AC] \cong [BC]$. (2)

Меняя местами условие и заключение и оставляя без изменения разъяснительную часть, мы получаем новую теорему, которая называется *обратной* первоначальной. Подчеркнем еще раз, что у *исходной* теоремы и у *обратной* ей разъяснительная часть одна и та же.

Теорема (2) — обратная для теоремы (1). В данном случае исходная теорема (1) и обратная ей теорема (2) справедливы: если треугольник равнобедренный, то биссектриса угла при вершине является его осью симметрии; обратно, если биссектриса угла при вершине является осью симметрии треугольника, то этот треугольник равнобедренный.

Однако из того, что некоторая теорема справедлива, не всегда следует, что обратная ей теорема также справедлива. Например, следующая теорема

$$(\forall \text{т. } A, B, C) (C \notin (AB)) \Rightarrow (|AB| < |AC| + |BC|)$$

справедлива, а обратная ей теорема

$$(\forall \text{т. } A, B, C) (|AB| < |AC| + |BC|) \Rightarrow (C \notin (AB))$$

неверна.

Таким образом, доказав некоторую теорему, мы еще не можем утверждать, что справедлива и обратная теорема. Справедливость обратной теоремы требует отдельного доказательства.

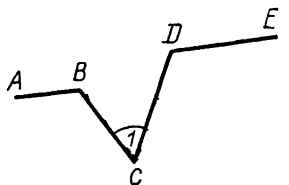


Рис. 113

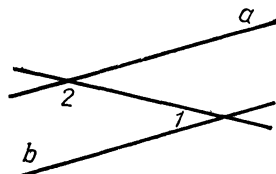


Рис. 114

Для каждой из следующих теорем сформулируйте обратную; укажите, какие из обратных теорем истинны:

- а) $(\forall \angle ABC, l, \text{ т. } M, \text{ где } \widehat{ABC} < 180^\circ, l \text{ — биссектриса } \angle ABC, M \in \angle ABC) (M \in l) \Rightarrow (d(M, [BA]) = d(M, [BC]))$;
- б) $(\forall l, \text{ т. } A, B, M, \text{ где } l \text{ — ось симметрии точек } A \text{ и } B) (|AM| = |BM|) \Rightarrow (M \in l)$;
- в) $(\forall l, \text{ пр. } a, \text{ т. } O, A, \text{ где } l \text{ — окружность в центре } O, A \in l \cap a) (a \text{ — касательная к } l) \Rightarrow (a \perp OA)$.

ЗАДАЧИ

В задачах 156—162 выделите разъяснительную часть, условие и заключение теоремы. Решите вопрос о справедливости обратных теорем (если теоремы несправедливы, придумайте пример, подтверждающий это; если справедливы — докажите).

156. Равнобедренный треугольник имеет ось симметрии.
157. Углы при основании равнобедренного треугольника конгруэнтны.
158. Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.
159. В равностороннем треугольнике все углы конгруэнтны.
160. Если в прямоугольном треугольнике один угол имеет величину 30° , то длина катета, лежащего против этого угла, равна половине длины гипотенузы.

161. Пусть a — прямая и l — окружность с центром O и радиусом r . Тогда если a — касательная к окружности l , то $d(O, a) = r$.
162. Если четырехугольник правильный, то он имеет центр симметрии.

22. ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ДВУХ ПРЯМЫХ

Выделим разъяснительную часть, условие и заключение теоремы о накрест лежащих углах, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей:

$(\forall \text{ пр. } a, b, m; \angle F, \angle H, \text{ где } \angle F \text{ и } \angle H \text{ — накрест лежащие углы при пересечении прямых } a \text{ и } b \text{ прямой } m) (a \parallel b) \Rightarrow (\angle F \cong \angle H)$.

Здесь несколько «длинно» выглядит разъяснительная часть теоремы. Это связано с тем, что описать словами разъяснительную часть теоремы сложнее, чем изобразить соответствующую фигуру на чертеже (рис. 115). Для получения обратной теоремы сохраним разъяснительную часть, а условие и заключение поменяем местами:

($\forall$ пр. a, b, m ; $\angle F, \angle H$, где $\angle F$ и $\angle H$ — накрест лежащие углы при пересечении прямых a и b прямой m) ($\angle F \cong \angle H$) $\Rightarrow (a \parallel b)$.

Словами эта теорема формулируется таким образом:

Теорема. Если накрест лежащие углы при пересечении двух данных прямых третьей конгруэнтны, то данные прямые параллельны.

Доказательство. Пусть $\angle MAB$ и $\angle NBA$ — конгруэнтные накрест лежащие углы, образованные при пересечении прямых MA и NB прямой AB (рис. 116). Через O обозначим середину отрезка AB . При симметрии относительно O точка A переходит в B , отрезок OA — в отрезок OB , угол OAM — в конгруэнтный ему угол OBN . Отсюда следует, что луч AM переходит в луч BN , а прямая AM — в прямую BN . Значит, прямые AM и BN симметричны относительно точки O и потому параллельны.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Известно, что $\angle 1 \cong \angle 2$ (рис. 117). Можно ли утверждать, что $\angle 3 \cong \angle 4$?
- На рисунке 118 показан прием построения параллельных прямых при помощи чертежного треугольника и линейки. Откуда следует, что построенные прямые параллельны?
- Докажите, что две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

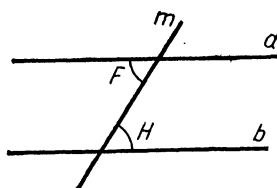


Рис. 115

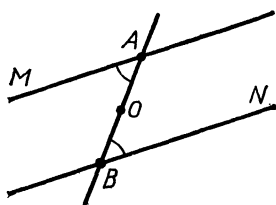


Рис. 116

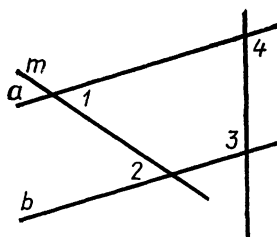


Рис. 117

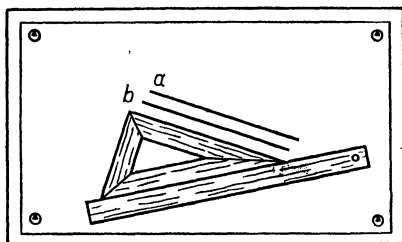


Рис. 118

ЗАДАЧИ

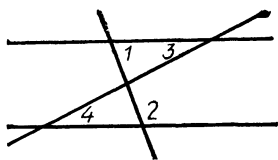


Рис. 119

163. На рисунке 119 $\hat{1} = 70^\circ$, $\hat{2} = 110^\circ$. Докажите, что $\angle 3 \cong \angle 4$. Сформулируйте теоремы, которыми вы пользовались, решая задачу.

164. Докажите теорему:

$$(\forall \text{ пр. } l, m, n) (l \parallel m \text{ и } m \parallel n) \Rightarrow (l \parallel n).$$

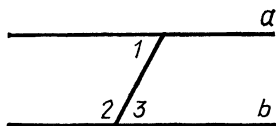


Рис. 120

165. Две прямые пересечены третьей, причем при пересечении с одной прямой образовался угол в 127° , а при пересечении с другой — угол в 53° . Обязательно ли эти прямые параллельны? Сделайте чертеж.

166. Как расположены друг относительно друга биссектрисы двух конгруэнтных углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей? Как расположены биссектрисы двух неконгруэнтных углов?

167. На рисунке 120 $\hat{1} = \hat{2} - \hat{3} = 60^\circ$. Параллельны ли прямые a и b ?

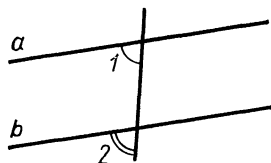


Рис. 121

168. На рисунке 121 величина угла 2 в 1,5 раза меньше величины смежного с ним угла; $\hat{1} = 73^\circ$. Параллельны ли прямые a и b ? Сформулируйте теорему, на основании которой вы ответили на вопрос задачи.

169. На рисунке 122 $\widehat{BED} = 80^\circ$, $\widehat{EDC} = 25^\circ$. Чему должна равняться величина угла ABC , чтобы прямая AB была параллельна прямой CD ?

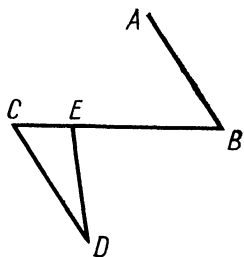


Рис. 122

23. СУММА ВЕЛИЧИН УГЛОВ ВЫПУКЛОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

Фигура F называется *выпуклой*, если для любых ее двух точек A и B отрезок AB целиком содержится в фигуре F (рис. 123). Круг, треугольник, угол, меньший развернутого, полуплоскость могут служить примерами выпуклых фи-

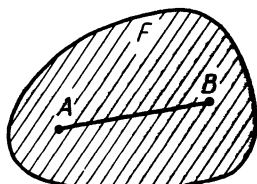


Рис. 123

гур (рис. 124). На рисунке 125 изображены невыпуклые фигуры.

Пусть F — выпуклый многоугольник и A — одна из его вершин (рис. 126). Проведем в этом многоугольнике все диагонали, выходящие из вершины A . Если многоугольник F имеет n вершин, то эти диагонали разбивают его на $n-2$ треугольников. Заметим, что если бы многоугольник F не был выпуклым, то диагонали, проведенные из вершины A , могли бы частично проходить вне многоугольника (рис. 127) и разбиения на треугольники не получилось бы.

Пусть AB и AC — стороны, исходящие из вершины A (рис. 128). Угол BAC , меньший развернутого, называют *внутренним* углом выпуклого многоугольника F при вершине A . Угол, смежный с ним, называется *внешним* углом при вершине A . На рисунке 128 каждый из углов 1 и 2 является внешним углом многоугольника F при вершине A .

Теорема 1. Сумма величин внутренних углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$.

Доказательство. Разобьем n -угольник на $(n-2)$ треугольников диагоналями, выходящими из вершины A (рис. 126). Тогда сумма величин всех углов получившихся треугольников как раз равна сумме величин углов рассматриваемого n -угольника. А так как в каждом треугольнике сумма величин углов равна 180° и число треугольников равно $n-2$, то сумма величин всех углов n -угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$.

Доказанная теорема справедлива для *любого* n -угольника (не обязательно выпуклого). В невыпуклом многоугольнике некоторые его углы больше развернутого (рис. 127), но сумма величин всех его углов и в этом случае равна $180^\circ \cdot (n-2)$. Доказательство теоремы для этого случая более сложно и здесь не рассматривается.

В следующей теореме речь идет о сумме величин всех внешних углов вы-

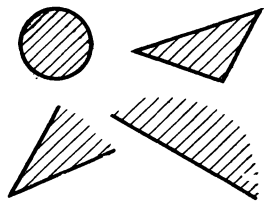


Рис. 124

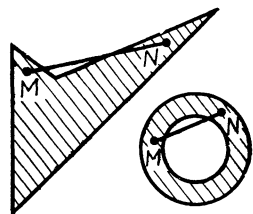


Рис. 125

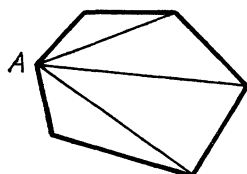


Рис. 126

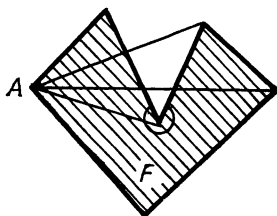


Рис. 127

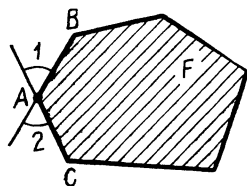


Рис. 128

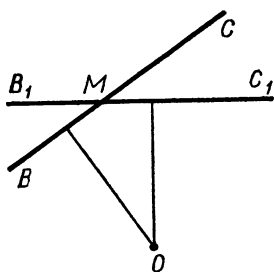


Рис. 129

пуклого многоугольника. Предполагается, что при каждой вершине взят один из внешних углов.

Теорема 2. Сумма величин внешних углов выпуклого многоугольника равна 360° .

Доказательство. Пусть рассматриваемый многоугольник F имеет n вершин. Возьмем при каждой вершине внутренний и внешний углы этого многоугольника. Вместе их величины составляют 180° .

Значит, сумма величин всех внутренних и всех внешних углов этого многоугольника равна $180^\circ \cdot n$. Так как сумма величин внутренних углов равна $180^\circ \cdot (n-2)$, то на долю внешних углов остается $180^\circ \cdot n - 180^\circ \cdot (n-2) = 180^\circ \cdot 2 = 360^\circ$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Величины трех углов выпуклого четырехугольника равны 90° , 80° и 70° . Чему равна величина четвертого угла?
- Существует ли выпуклый четырехугольник, величины трех внутренних углов которого равны 20° , 40° и 80° ?
- Какие из следующих высказываний истинны: 1) существует четырехугольник, у которого все четыре угла острые; 2) существует четырехугольник, у которого все четыре угла тупые; 3) существует четырехугольник, у которого все четыре угла прямые?
- Прямая B_1C_1 получается из прямой BC поворотом на угол -35° вокруг точки O (рис. 129). Найдите величину угла B_1MC .

ЗАДАЧИ

- Может ли объединение выпуклых фигур быть невыпуклой фигурой? Приведите примеры.
- Подсчитайте сумму величин углов:
 - пятиугольника;
 - шестиугольника.
- Определите число сторон многоугольника, если сумма величин его внутренних углов равна:
 - 1080° ;
 - 1260° .
- Сумма величин внешних углов многоугольника в 3 раза меньше суммы величин его внутренних углов. Найдите число сторон этого многоугольника.
- Через точку, принадлежащую биссектрисе угла в 70° , проведены прямые a и b , перпендикулярные сторонам угла. Чему равны величины углов, образованных при пересечении прямых a и b ?

175. Вычислите величины внутренних углов:

- правильного пятиугольника;
- правильного шестиугольника.

176. Дан острый угол. Через точку A , принадлежащую его внутренней области, к сторонам угла проведены перпендикуляры. Докажите, что величина угла, образованного этими перпендикулярами, не зависит от положения точки A .



Рис. 130

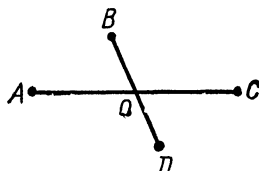


Рис. 131

24. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Точка A на рисунке 130 принадлежит фигуре F ; точка A_1 , симметричная A относительно O , также принадлежит фигуре F . Вообще, какую бы точку фигуры F мы ни взяли, симметричная ей точка также принадлежит фигуре F . Другими словами, симметрия относительно точки O переводит рассматриваемую фигуру в ту же самую фигуру.

Фигура F называется *центрально-симметричной*, если при симметрии относительно некоторой точки O эта фигура переходит в ту же фигуру. Точка O называется *центром симметрии* этой фигуры.

Возьмем три произвольные точки A , B и O , не лежащие на одной прямой, и построим точки $C = r(A)$ и $D = r(B)$, где r — симметрия относительно точки O (рис. 131). Четырехугольник $ABCD$ (рис. 132) переходит при симметрии r в этот же четырехугольник, т. е. является центрально-симметричной фигурой.

Четырехугольник, имеющий центр симметрии, называется *параллелограммом*.

На рисунке 133 изображено несколько параллелограммов.

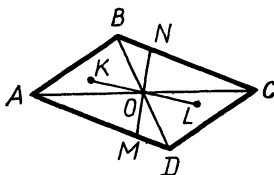


Рис. 132

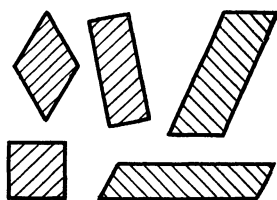


Рис. 133

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Имеет ли отрезок центр симметрии? Имеет ли луч центр симметрии? Сколько центров симметрии имеет прямая?
- Докажите, что если F — произвольная фигура, а F_1 — сим-

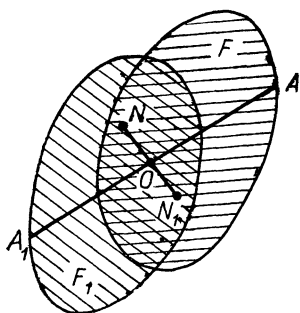


Рис. 134

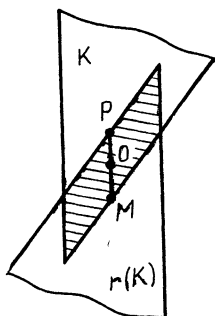


Рис. 135

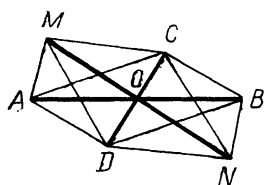


Рис. 136

метричная ей фигура относительно точки O (рис. 134), то фигура $F \cup F_1$ имеет точку O своим центром симметрии. Докажите, что фигура $F \cap F_1$ имеет точку O своим центром симметрии.

в) Что представляет собой фигура $K \cap r(K)$, где K —угол, меньший развернутого, а r —симметрия относительно его внутренней точки O (рис. 135)?

г) На рисунке 136 точка O —общая середина отрезков AB , CD и MN . Какие из четырехугольников на этом рисунке являются параллелограммами?

ЗАДАЧИ

177. Примите произвольную точку O за центр симметрии и постройте параллелограмм $ABCD$, имеющий точку O своим центром симметрии. Отметьте на сторонах AB и BC по одной точке и постройте точки, симметричные этим точкам относительно центра O .

178. Возьмите точки A , B и C , не лежащие на одной прямой, и постройте вершину D параллелограмма $ABCD$.

179. Возьмите окружность l и точки A и B на ней. Постройте хорду CD этой окружности так, чтобы $[CD] \cong [AB]$ и $(CD) \parallel (AB)$. Является ли четырехугольник с вершинами A , B , C , D параллелограммом?

180. Возьмите треугольник ABC и точку O в его внутренней области. Постройте треугольник PTH , симметричный треугольнику ABC относительно точки O . Выделите на рисунке фигуры, имеющие центр симметрии.

181. Точки M и K —середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что: а) $(BK) \parallel (MD)$; б) $(AM) \parallel (KC)$; в) $\triangle BKA \cong \triangle MCD$.

182. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AB и CD отложены конгруэнтные отрезки AF и CM . Докажите, что отрезок FM делится диагональю AC пополам.

183. Начертите параллелограмм $ABCD$ с центром симметрии O . Возьмите на сторонах BC и CD точки P и T . Постройте на сторонах AB и AD точки K и E так, чтобы отрезки PT и KE были конгруэнтны и параллельны.
184. Начертите окружность с центром O и параллелограмм, имеющий точку O своим центром симметрии. Проведите через точку O прямую и докажите, что отрезки этой прямой, заключенные между окружностью и параллелограммом, конгруэнтны.

25. СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Следующие теоремы выражают основные свойства параллелограмма.

Теорема 1. Диагонали параллелограмма делятся точкой их пересечения пополам.

Доказательство. Пусть O — центр симметрии параллелограмма $ABCD$ (рис. 137). Вершины A и C симметричны относительно точки O , и потому диагональ AC проходит через точку O и делится ею пополам. Точно так же диагональ BD проходит через точку O и делится ею пополам. Значит, O — общая середина диагоналей AC и BD .

Из доказанной теоремы непосредственно следует, что центр симметрии параллелограмма совпадает с точкой пересечения его диагоналей.

Теорема 2. Противоположные стороны параллелограмма параллельны.

Доказательство. Стороны AB и CD симметричны относительно точки O (рис. 137), и потому $(AB) \parallel (CD)$. Точно так же $(AD) \parallel (BC)$.

Теорема 3. Противоположные стороны параллелограмма конгруэнтны.

Доказательство. Стороны AB и CD симметричны относительно точки O (рис. 137), и потому они конгруэнтны, т. е. $[AB] \cong [CD]$. Точно так же $[AD] \cong [BC]$.

Теорема 4. Противоположные углы параллелограмма конгруэнтны.

Доказательство. Углы A и C симметричны относительно точки O (рис. 137), и потому они конгруэнтны, т. е. $\angle A \cong \angle C$. Точно так же $\angle B \cong \angle D$.

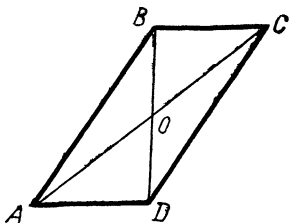


Рис. 137

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

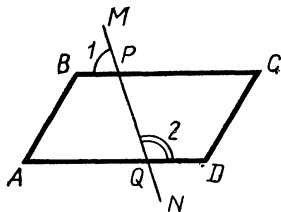


Рис. 138

- а) Определите длины сторон параллелограмма, если его периметр равен 22 см, а разность длин двух смежных сторон равна 3 см.
- б) Величина одного из углов параллелограмма равна 28° . Чему равны величины остальных его углов?
- в) Четырехугольник $ABCD$ на рисунке 138 — параллелограмм. Величина угла 1 равна 69° . Определите величину угла 2.

ЗАДАЧИ

185. Длина одной из сторон параллелограмма равна 8 см. Могут ли длины его диагоналей выражаться следующими числами: а) 6 см и 10 см; б) 12 см и 10 см; в) 6 см и 8 см? В тех случаях, когда это возможно, постройте параллелограмм.
 186. Докажите, что биссектрисы противоположных углов параллелограмма параллельны.
 187. Длины сторон параллелограмма равны 12 см и 4 см. Биссектрисы двух прилежащих к большей стороне углов делят противоположную сторону на три части. Найдите длину каждой из них.
 188. Меньшая из сторон параллелограмма имеет длину 3 см. Биссектрисы углов, прилежащих к одной из не конгруэнтных ей сторон, пересекаются в точке, принадлежащей противоположной стороне. Найдите длину большей стороны параллелограмма.
 189. Определите величины углов параллелограмма $ABCD$, если $\hat{A} - \hat{B} = 32^\circ$.
 190. Сумма величин двух углов параллелограмма равна 144° . Найдите величины этих углов.
-
191. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 38 см. Найдите длины его сторон, если $|AB| : |AD| = 7 : 12$.
 192. Вычислите величины углов параллелограмма, если величина одного из его углов в 8 раз больше величины другого.
 193. Докажите, что в параллелограмме $ABCD$ противоположные вершины B и D находятся на одинаковом расстоянии от прямой AC .

26. ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

При решении задач часто бывает нужно установить, что рассматриваемый четырехугольник является параллелограммом. Следующие две теоремы дают наиболее важные случаи, когда это можно сделать.

Теорема 1. Если противоположные стороны четырехугольника парно параллельны (т. е. две противоположные стороны параллельны и две другие также параллельны), **то этот четырехугольник — параллелограмм.**

Доказательство. В четырехугольнике $ABCD$ проведем диагональ AC и обозначим через O ее середину. При симметрии r относительно O (рис. 139) точка A переходит в точку C , прямая l_1 переходит в прямую, проходящую через точку C и параллельную l_1 , т. е. в прямую l_2 . Аналогично $m_2 = r(m_1)$. Следовательно, точка O является центром симметрии четырехугольника $ABCD$, и потому этот четырехугольник — параллелограмм.

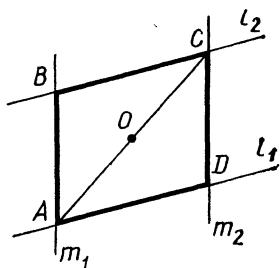


Рис. 139

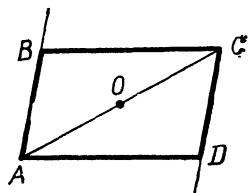


Рис. 140

Теорема 2. Если две противоположные стороны четырехугольника конгруэнтны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — четырехугольник, у которого $(AB) \parallel (CD)$, $[AB] \cong [CD]$. Обозначим через O середину диагонали AC (рис. 140). Так как $(AB) \parallel (CD)$, то лучи AB и CD симметричны друг другу относительно точки O . А так как $[AB] \cong [CD]$, то точки B и D симметричны относительно O . Следовательно, точка O — центр симметрии четырехугольника $ABCD$, и потому $ABCD$ — параллелограмм.

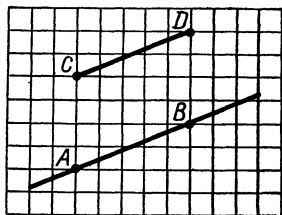


Рис. 141

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Какие из следующих высказываний истинны: 1) любой четырехугольник, у которого имеются две параллельные стороны, — параллелограмм; 2) любой многоугольник, у которого имеются две пары параллельных сторон, — параллелограмм; 3) любой четырехугольник, у которого имеются две пары параллельных сторон, — параллелограмм; 4) любой четырехугольник, у которого имеется пара параллельных и пара конгруэнтных сторон, — параллелограмм?
- Докажите, что прямые AB и CD на рисунке 141 параллельны.
- На рисунке 142 прямые l_1 и l_2 параллельны, прямые m_1, m_2, m_3, m_4 также параллельны между собой. Докажите, что

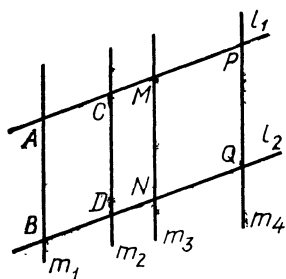


Рис. 142

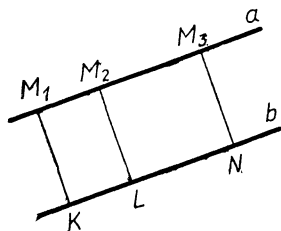


Рис. 143

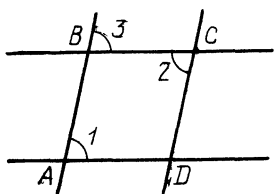


Рис. 144

все отрезки AB , CD , MN , PQ конгруэнтны между собой. Какие еще конгруэнтные между собой отрезки можно указать на этом рисунке?

- г) На рисунке 143 прямые a и b параллельны. Докажите, что $d(M_1, b) = d(M_2, b) = d(M_3, b)$. Число $d(M, b)$, где $M \in a$, называется *расстоянием* между параллельными прямыми a и b .

ЗАДАЧИ

194. В теореме 1 предыдущего пункта выделите разъяснительную часть, условие и заключение. Сформулируйте и докажите обратную теорему.
195. Докажите, что если углы 1, 2 и 3 конгруэнтны (рис. 144), то четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.
196. Докажите, что если противоположные углы четырехугольника F попарно конгруэнтны, то F — параллелограмм.
197. $ABCD$ — параллелограмм. На прямой AC вне параллелограмма отметили такие точки M и K , что $|CK| = |MA|$ (причем точки M и K находятся по разные стороны отрезка AC). Докажите, что четырехугольник $MBKD$ — параллелограмм.
198. В параллелограмме $ABCD$ перпендикуляры, проведенные через вершины B и D к диагонали AC , пересекают ее в точках M и K . Докажите, что: а) $|BK| = |DM|$; б) $(BK) \parallel (DM)$.
199. $ABCD$ — параллелограмм. На лучах AB и CD взяты такие точки M и P , что $|AM| = |CP|$. Докажите, что углы AMC и CPA конгруэнтны.
200. Через точку, данную внутри угла (меньше развернутого), проведите прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между сторонами угла, делился в этой точке пополам.
201. Дан четырехугольник $ABCD$, у которого $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$; $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.
202. Докажите, что если через точку пересечения диагоналей параллелограмма провести две прямые, то точки пересечения этих прямых со сторонами параллелограмма будут вершинами нового параллелограмма.

203. $MNPQ$ — параллелограмм. На лучах MN и PQ взяты такие точки A и B , что $|MA| = |PB|$. Докажите, что прямые MP , NQ и AB пересекаются в одной точке.

27. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим следующую теорему:

$$(\forall t. A, B, C) (C \notin (AB)) \Rightarrow (|AC| + |BC| > |AB|). \quad (1)$$

Эту теорему можно разъяснить так: достаточно знать, что точка C не принадлежит прямой AB , и тогда мы можем утверждать, что $|AC| + |BC| > |AB|$. В математике принято эту формулировку (содержащую слово «достаточно») выражать по-другому: для того чтобы имело место неравенство $|AC| + |BC| > |AB|$, *достаточно*, чтобы точка C не принадлежала прямой AB .

Вообще, если сказано, что некоторое утверждение P является *достаточным* для Q , то это означает, что утверждается справедливость теоремы, в которой P — условие, а Q — заключение.

Теорему (1) можно разъяснить еще и так: если $C \notin (AB)$, то непременно должно быть выполнено неравенство $|AC| + |BC| > |AB|$. В математике принято эту формулировку выражать по-другому, используя слово «необходимо»: для того чтобы точка C лежала вне прямой AB , *необходимо* выполнение неравенства $|AC| + |BC| > |AB|$.

Вообще, если сказано, что некоторое утверждение Q является *необходимым* для P , то это означает, что утверждается справедливость теоремы, в которой P — условие, а Q — заключение.

Если для некоторой теоремы справедлива также и обратная ей теорема, то ее формулировку можно выразить по-другому, используя слова «необходимо и достаточно». Например, теорема $(\forall ABCD) (ABCD \text{ — параллелограмм}) \Rightarrow ((AB) \parallel (CD) \text{ и } (AD) \parallel (BC))$ (2)

и обратная ей теорема

$$(\forall ABCD) ((AB) \parallel (CD) \text{ и } (AD) \parallel (BC)) \Rightarrow (ABCD \text{ — параллелограмм}) \quad (3)$$

справедливы. Иными словами, для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, *необходимо*, чтобы его противоположные стороны были попарно параллельны (теорема (2)); для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, *достаточно*, чтобы его противоположные стороны были попарно параллельны (теорема (3)). Это кратко записывается в виде:

$$(\forall ABCD) (ABCD \text{ — параллелограмм}) \Leftrightarrow ((AB) \parallel (CD) \text{ и } (AD) \parallel (BC))$$

и читается словами так: для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, *необходимо и достаточно*, чтобы его противоположные стороны были попарно параллельны.

Вот еще один пример. Для теоремы

$$(\forall \triangle ABC) ([AB] \cong [BC]) \Rightarrow (\angle A \cong \angle C)$$

обратная теорема также справедлива:

$$(\forall \triangle ABC) (\angle A \cong \angle C) \Rightarrow ([AB] \cong [BC]).$$

Это позволяет дать единую формулировку: для того чтобы треугольник был равнобедренным, необходимо и достаточно, чтобы два угла этого треугольника были конгруэнтны. Краткая запись:

$$(\forall \triangle ABC) ([AB] \cong [BC]) \Leftrightarrow (\angle A \cong \angle C).$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Дайте три формулировки каждой из следующих теорем, используя в одной из них слова «если..., то», в другой — слово «необходимо», а в третьей — слово «достаточно»:
- 1) $(\forall F, F_1, s, \text{ где } F, F_1 \text{ — фигуры, } s \text{ — осевая симметрия}) (F_1 = s(F)) \Rightarrow (F_1 \cong F).$
 - 2) $(\forall \text{т. } A, B, C) (C \in [AB]) \Rightarrow (|AC| + |BC| = |AB|).$
 - 3) $(\forall \triangle ABC) (\hat{A} = 90^\circ) \Rightarrow (|BC| > |AB|).$
- б) Какие из следующих высказываний истинны: 1) для того чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом, достаточно, чтобы $(AB) \parallel (CD)$; 2) для того чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом, необходимо чтобы $(AB) \parallel (CD)$; 3) для того чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом, необходимо и достаточно чтобы $(AB) \parallel (CD)$; 4) для того чтобы углы были вертикальными, достаточно чтобы они были конгруэнтными; 5) для того чтобы углы были вертикальными, необходимо чтобы они были конгруэнтными; 6) для того чтобы углы были вертикальными, необходимо и достаточно чтобы они были конгруэнтными; 7) для того чтобы точка M угла K ($\hat{K} < 180^\circ$) принадлежала его биссектрисе, необходимо и достаточно, чтобы расстояния точки M от сторон угла были равны; 8) для того чтобы расстояния от точки M угла K ($\hat{K} < 180^\circ$) до сторон угла K были равны, необходимо и достаточно чтобы точка M принадлежала его биссектрисе?
- в) Прочитайте следующие формулировки, вставляя слова «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно», чтобы получились верные теоремы: 1) для параллельности прямых a и b ..., чтобы они были симметричны относительно некоторой точки O ; 2) для параллельности прямых a и b ..., чтобы накрест лежащие углы, образованные при пересечении этих прямых с третьей прямой, были конгруэнтны; 3) для

конгруэнтности фигур F_1 и $F_2, \dots$, чтобы они были симметричны относительно некоторой точки O ; 4) для того чтобы пересечение окружности и прямой содержало две точки $\dots$, чтобы расстояние от центра окружности до прямой было меньше радиуса окружности.

ЗАДАЧИ

В задачах 204—208 запишите теоремы с помощью знаков $\forall$ и $\Rightarrow$ и докажите эти теоремы.

204. Для того чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом, необходимо чтобы $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$.
205. Для того чтобы сумма величин углов B и C четырехугольника $ABCD$ была равна 180° , достаточно чтобы этот четырехугольник был параллелограммом.
206. Для того чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом, необходимо и достаточно выполнение равенств $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ и $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$.
207. Для того чтобы треугольник ABC был равнобедренным, необходимо чтобы $\hat{A} = 60^\circ$.
208. Для того чтобы треугольник ABC был равнобедренным, достаточно чтобы $\hat{A} = \hat{B} = 60^\circ$.

209. Запишите следующие теоремы, используя знаки $\forall$ и $\Rightarrow$. Докажите эти теоремы:
- а) для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо чтобы диагональ разбивала его на два конгруэнтных треугольника;
- б) для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, достаточно чтобы все его углы были прямыми.
210. Соедините две следующие теоремы в одну; запишите словесную формулировку этой теоремы с использованием терминов «гипотенуза», «катет», «угол, лежащий против катета» и оборота речи «необходимо и достаточно»:

$$(\forall \triangle ABC, \hat{C} = 90^\circ) (\hat{A} = 30^\circ) \Rightarrow \left(|BC| = \frac{1}{2} |AB| \right),$$

$$(\forall \triangle ABC, \hat{C} = 90^\circ) \left(|BC| = \frac{1}{2} |AB| \right) \Rightarrow (\hat{A} = 30^\circ).$$

28. РОМБ

Параллелограмм, две смежные стороны которого конгруэнтны, называется ромбом.

Легко видеть, что у ромба все стороны конгруэнтны между собой.

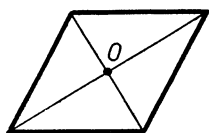


Рис. 145

Так как любой ромб является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. Например, диагонали ромба делятся точкой их пересечения пополам, ромб имеет центр симметрии и т. д. (рис. 145).

Теорема. *Для того чтобы параллелограмм был ромбом, необходимо и достаточно чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны.*

Доказательство. Докажем прежде всего, что

$(\forall ABCD, \text{ где } ABCD \text{ — параллелограмм}) (ABCD \text{ — ромб}) \Rightarrow ((AC) \perp (BD)).$

В самом деле, пусть l — ось симметрии точек A и C (рис. 146). Так как $|AB| = |BC|$, то $B \in l$. Точно так же $D \in l$. Значит, прямая BD совпадает с l . Так как точки A и C симметричны относительно l , т. е. относительно прямой BD , то $AC \perp BD$.

Докажем теперь обратную теорему:

$(\forall ABCD, \text{ где } ABCD \text{ — параллелограмм}) ((AC) \perp (BD)) \Rightarrow (ABCD \text{ — ромб}).$

Обозначим через O точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ (рис. 147). Тогда $|AO| = |OC|$. А так как по условию $(AC) \perp (BD)$, то точки A и C симметричны относительно прямой BD . Следовательно, $[AB] \cong [BC]$, т. е. $ABCD$ — ромб.

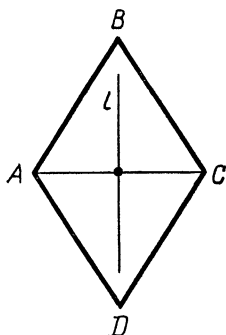


Рис. 146

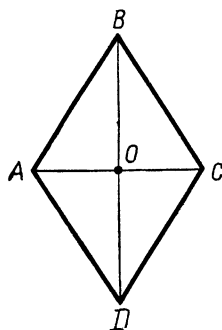


Рис. 147

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- На рисунке 148 изображен ромб. Укажите на этом рисунке конгруэнтные отрезки; конгруэнтные углы.
- Какие из следующих высказываний истинны: 1) для того чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо чтобы его диагонали были перпендикулярны; 2) для того чтобы четырехугольник был ромбом, достаточно чтобы его диагонали были перпендикулярны; 3) для того чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо и достаточно чтобы его диагонали были перпендикулярны?

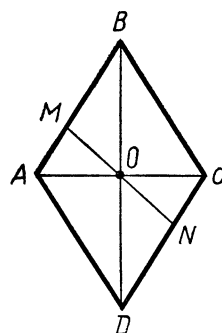


Рис. 148

211. Точка M — общая середина диагоналей $[AC]$ и $[BD]$ четырехугольника $ABCD$, $[BM]$ — биссектриса угла ABC . Докажите, что $ABCD$ — ромб.
212. Докажите, что диагонали всякого ромба делят его углы пополам.
213. Докажите следующую теорему: для того чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо и достаточно чтобы диагонали были его осями симметрии.
214. а) Докажите, что точка пересечения диагоналей ромба одинаково удалена от всех его сторон.
б) Докажите, что существует окружность, касающаяся всех сторон ромба (вписанная окружность ромба).
215. На сторонах $[AB]$ и $[AD]$ ромба $ABCD$ взяты такие точки M и N , что $(DM) \perp (AB)$, $(BN) \perp (AD)$. Докажите, что: а) $[BN] \cong [DM]$; б) точка пересечения прямых DM и BN принадлежит диагонали $[AC]$.

216. В четырехугольнике $ABCD$ $|AB| = |CD|$, $(AB) \parallel (CD)$ и $\angle BAC \cong \angle BCA$. Докажите, что $ABCD$ — ромб.
217. В ромбе одна из диагоналей конгруэнтна его стороне. Чему равны величины углов ромба?
218. Справедлива ли теорема: любой четырехугольник, имеющий ось симметрии, есть ромб? Справедлива ли обратная теорема?

29. ПРЯМОУГОЛЬНИК. КВАДРАТ

Параллелограмм, у которого один из углов прямой, называется прямоугольником.

Легко видеть, что и все остальные углы прямоугольника прямые. В самом деле, пусть в параллелограмме $ABCD$ $\hat{1} = 90^\circ$ (рис. 149). Тогда $\hat{2} = 90^\circ$ ($\angle 1 \cong \angle 2$, как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD); далее, $\hat{3} = 90^\circ$, так как $\angle 3$ смежный углу 2; наконец, $\hat{4} = \hat{1} = 90^\circ$; $\hat{5} = \hat{3} = 90^\circ$ ($\hat{1} = \hat{4}$, $\hat{3} = \hat{5}$, как противоположные углы параллелограмма).

Так как всякий прямоугольник является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. Докажем еще одно свойство.

Теорема. Диагонали прямоугольника конгруэнтны.

Доказательство. Проведем ось симметрии l точек A и B (рис. 150). Так

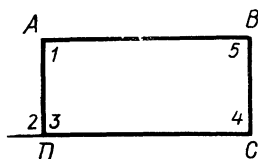


Рис. 149

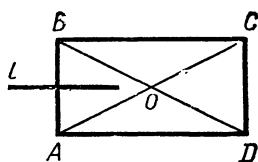


Рис. 150

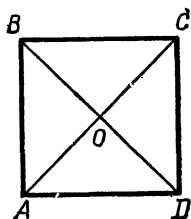


Рис. 151

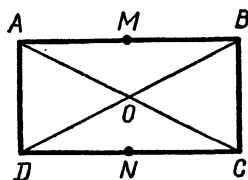


Рис. 152

как $\hat{A} = 90^\circ$ и $\hat{B} = 90^\circ$, то лучи AD и BC симметричны относительно прямой l . Далее, так как $[BC] \cong [AD]$, то точки C и D симметричны относительно l . Следовательно, диагонали AC и BD симметричны относительно прямой l и потому конгруэнтны.

Теорема доказана.

Квадратом называется ромб с прямыми углами.

Можно сказать и иначе: *квадрат — это прямоугольник с конгруэнтными сторонами.*

Квадрат обладает всеми свойствами параллелограмма, ромба и прямоугольника. В частности, диагонали квадрата конгруэнтны и перпендикулярны (рис. 151).

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник, O — точка пересечения его диагоналей, M , N — середины сторон AB и CD (рис. 152). Объясните, почему верны следующие высказывания:

1) $[OA] \cong [OC]$; 2) $[OA] \cong [OD]$; 3) $[AD] \cong [BC]$; 4) O — центр симметрии четырехугольника $ABCD$; 5) (MN) — ось симметрии четырехугольника $ABCD$.

- б) Укажите, какие из углов на рисунке 152 конгруэнтны.

- в) Четырехугольник $ABCD$ (рис. 151) — квадрат. Объясните, почему верны следующие высказывания: 1) каждый из углов A , B , C , D — прямой; 2) $|AB| = |BC| = |CD| = |AD|$; 3) $|AC| = |BD|$; 4) $(AC) \perp (BD)$; 5) AC — биссектриса угла BAD .

- г) Какие из следующих высказываний истинны: 1) любой квадрат является прямоугольником; 2) существует ромб, являющийся прямоугольником; 3) любой прямоугольник является квадратом; 4) существует ромб, не являющийся квадратом; 5) существует квадрат, не являющийся ромбом?

ЗАДАЧИ

219. Точка пересечения диагоналей прямоугольника отстоит от его сторон на 2 см и 3 см. Определите периметр прямоугольника.
220. На сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ отложены отрезки AM и CP . Докажите, что: а) если $[AM] \cong [CP]$,

- то треугольники APB и CMD конгруэнтны; б) если $[AM] \cong [DP]$, то треугольники APB и CMD конгруэнтны.
221. Докажите, что около всякого прямоугольника можно описать окружность.
222. Даны прямая a и отрезок PQ . Что представляет собой множество $\{M: d(M, a) = |PQ|\}$?
223. Докажите, что квадрат имеет четыре оси симметрии.
-

224. Диагональ прямоугольника составляет со стороной угол в 40° . Определите величины углов, образованных при пересечении диагоналей.
225. Докажите, что если параллелограмм имеет ось симметрии, не проходящую ни через одну из его вершин, то он является прямоугольником.
226. Докажите, что для любого квадрата существует вписанная в него окружность и описанная около него окружность.

30. ПРЕДИКАТ

Рассмотрим следующее предложение, содержащее переменную T :

«Треугольник T прямоугольный.»

Обозначим это предложение через $A(T)$. Предложение $A(T)$ высказыванием не является: о его истинности мы ничего не можем сказать, пока не указано, какой конкретный треугольник обозначен буквой T . Например, если вместо T взять треугольник T_1 на рисунке 153, то получится высказывание $A(T_1)$, которое словами выражается так: «треугольник T_1 прямоугольный». Это высказывание ложно. Высказывание же $A(T_2)$ (т. е. «треугольник T_2 прямоугольный») истинно.

Итак, $A(T)$ представляет собой предложение, содержащее переменную T ; для каждого значения переменной T предложение $A(T)$ превращается в некоторое высказывание. Такие предложения в математике называют *предикатами*. В данном случае переменная T может принимать значения из множества всех треугольников. Поэтому говорят, что предикат $A(T)$ задан на множестве всех треугольников.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Является ли следующее предложение предикатом: «На этом уроке ученик x сидит у окна». Подставьте вместо x фамилии учащихся вашего класса так, чтобы получилось одно истинное и одно ложное высказывание.
- б) На каком множестве можно рассматривать каждый из следующих предикатов: 1) в нашем классе x учеников; 2) в нашей школе имеется n седьмых классов; 3) квадрат имеет y вершин? При каких значениях переменных x , n , y получаются истинные высказывания?

- в) На каком множестве задан следующий предикат $A(X)$: «четыреугольник X имеет центр симметрии»? Что представляет собой множество всех фигур X , для которых предикат $A(X)$ превращается в истинное высказывание? Принадлежит ли этому множеству произвольный прямоугольник? Квадрат?

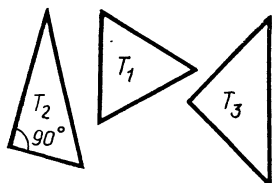


Рис. 153

г) На рисунке 154 изображен угол F . Обозначим через $Q(M)$ предикат: «точка M находится на одинаковом расстоянии от сторон угла». Что представляет собой множество всех точек угла F , при подстановке которых предикат $Q(M)$ превращается в истинное высказывание?

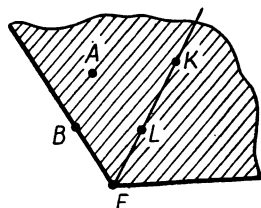


Рис. 154

д) Прочитайте разъяснительную часть, условие и заключение следующих теорем. Назовите предикат, представляющий собой условие теоремы; заключение теоремы. Какая часть записи теоремы указывает множество, на котором задан каждый из предикатов? Является ли сама теорема предикатом или высказыванием?

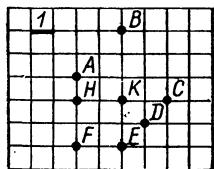


Рис. 155

1) $(\forall F, \text{ где } F \text{ — четырехугольник}) (F \text{ — ромб}) \Rightarrow (\text{диагонали четырехугольника } F \text{ перпендикулярны})$. 2) $(\forall Q, \text{ где } Q \text{ — четырехугольник}) (Q \text{ — прямоугольник}) \Rightarrow (\text{диагонали четырехугольника } Q \text{ конгруэнтны})$.

ЗАДАЧИ

227. Рассмотрим предикат $R(M)$: «точка M находится на расстоянии 2 от данной точки K » (рис. 155). Что представляет собой множество всех точек плоскости, при подстановке которых предикат $R(M)$ превращается в истинное высказывание? Запишите это множество с помощью фигурных скобок. Какие из указанных на рисунке 155 точек принадлежат этому множеству?
228. Укажите, на каком множестве задан предикат $A(Q)$: «противоположные стороны четырехугольника Q попарно параллельны.» Начертите какую-либо фигуру Q_1 , для которой $A(Q_1)$ — истинное высказывание. Что представляет собой множество всех фигур, для которых $A(Q)$ превращается в истинное высказывание?
229. Обозначим через $P(X)$ предикат: $X \in [AB]$. Известно, что $|AB| = 11$, $|KA| = 3$, $|KB| = 8$, $|FA| = 8,73$, $|FB| = 2,27$, $|NA| = 7,38$, $|NB| = 3,63$. Какие из точек K , F , N превращают предикат $P(X)$ в истинное высказывание?

В задачах 230, 231 прочитайте словами разъяснительную часть, условие и заключение теоремы. Выпишите отдельно предикат, представляющий собой условие, и предикат, представляющий собой заключение теоремы. Для каждого предиката укажите множество, на котором он задан.

230. ($\forall a, b$, где a и b — прямые) (a симметрична b относительно некоторой точки) $\Rightarrow (a \parallel b)$
231. ($\forall ABCD$, где $ABCD$ — четырехугольник) ($ABCD$ — параллелограмм) $\Rightarrow ([AB] \cong [CD])$.
-
232. Обозначим через $P(M)$ предикат: «расстояние точки M от данной точки K меньше или равно 2».
- а) При каких значениях переменной M из множества точек, указанных на рисунке 155, предикат $P(M)$ превращается в истинное высказывание? Запишите множество этих точек с помощью фигурных скобок.
- б) Что представляет собой множество всех точек плоскости, для которых $P(M)$ превращается в истинное высказывание? Запишите это множество с помощью фигурных скобок.
233. Укажите, на каком множестве задан предикат $C(X)$: «все стороны четырехугольника X конгруэнтны». Для каких фигур $C(X)$ превращается в истинное высказывание? Начертите одну такую фигуру.
234. Выпишите предикаты, являющиеся условием и заключением следующей теоремы, и укажите множество, на котором эти предикаты заданы.
- ($\forall ABCD$, где $ABCD$ — четырехугольник) ($ABCD$ — параллелограмм) $\Rightarrow ([AB] \parallel [CD])$.

31. ЗНАК СУЩЕСТВОВАНИЯ

Часто приходится формулировать высказывания, в которых используются слова: «существует», «хотя бы один», «найдется» и т. д. В математике принято вместо этих слов использовать знак $\exists$ (перевернутая буква E английского слова exists — существует).

Рассмотрим, например, три предиката, заданные на множестве всех треугольников:

$A(T)$: в треугольнике T сумма величин углов равна 180° ;

$B(T)$: один из углов треугольника T прямой;

$C(T)$: два угла треугольника T прямые.

Предикат $A(T)$ для всякого конкретного треугольника превращается в истинное высказывание. Иными словами, высказывание $(\forall T) A(T)$ истинно (в любом треугольнике сумма величин углов равна 180°).

Предикат $B(T)$ не для всякого конкретного треугольника T превращается в истинное высказывание; например, для треугольника T_1 на рисунке 156 высказывание $B(T_1)$ ложно. Поэтому мы не можем утверждать, что для *любого* T имеет место $B(T)$ (не можем утверждать, что в любом треугольнике один из углов прямой). Иными словами, высказывание $(\forall T) B(T)$ ложно. Вместе

с тем *существуют* такие треугольники, для которых $B(T)$ истинно (например, треугольники T_2, T_3 на рис. 156). Это высказывание записывают с помощью знака $\exists$:

$$(\exists T) B(T).$$

Словами эта запись читается так: «существует T , для которого справедливо $B(T)$ » (т. е. существует треугольник T , один из углов которого прямой).

Наконец, предикат $C(T)$ таков, что для него ложно не только высказывание $(\forall T) C(T)$, но и высказывание $(\exists T) C(T)$: не существует ни одного треугольника, имеющего два прямых угла.

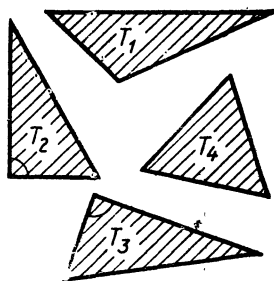


Рис. 156

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

а) Прочитайте словами следующие высказывания. Какие из них истинны:

- 1) $(\forall \triangle ABC) (|AB| + |BC| \geq |AC|)$;
- 2) $(\exists \triangle ABC) (|AB| + |BC| = |AC|)$;
- 3) $(\forall \triangle ABC) (|AB| = |AC|)$;
- 4) $(\exists \triangle ABC) (|AB| = |AC|)$?

б) Рассмотрим предикат, заданный на множестве всех треугольников:

$P(T)$: треугольник T имеет ось симметрии.

Прочитайте словами следующие высказывания и установите, являются ли они истинными:

- 1) $(\forall T) P(T)$; 2) $(\exists T) P(T)$.

в) На рисунке 157 начерчен круг F с центром O и радиусом 3. Убедитесь, что следующие высказывания истинны:

- 1) $(\exists M \in F) (|OM| = 2)$; 4) $(\exists M \in F) (|OM| \geq 3)$;
- 2) $(\exists M \in F) (|OM| = 3)$; 5) $(\exists M \in F) (|OM| \leq 0)$.
- 3) $(\exists M \in F) (|OM| \leq 3)$;

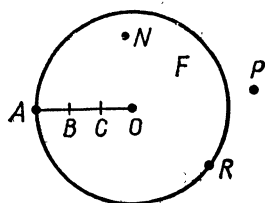


Рис. 157

ЗАДАЧИ

235. Запишите с помощью знаков $\forall$ и $\exists$ следующие высказывания. Какие из них истинны:

- а) в любом треугольнике длина одной стороны меньше суммы длин двух других сторон;
- б) существует треугольник, в котором длина стороны равна сумме длин двух других сторон;

в) существуют такие три точки A , B и C , что расстояние от A до B равно сумме расстояний от A до C и от B до C ;
 г) для любых трех точек A , B и C расстояние от A до B равно сумме расстояний от A до C и от B до C ?

236. Начертите $\triangle ABC$. Через $P(M)$ и $Q(M)$ обозначьте следующие предикаты, заданные на множестве всех точек плоскости:

$P(M)$: точка M находится на равном расстоянии от точек B и C ;

$Q(M)$: точка M находится на одинаковом расстоянии от сторон угла ABC .

Прочитайте словами следующие высказывания и установите, какие из них истинны. Ответ подтвердите чертежом или рассуждением:

а) $(\forall M) P(M)$; г) $(\exists M) Q(M)$;

б) $(\exists M) P(M)$; д) $(\exists M) (P(M) \text{ и } Q(M))$.

в) $(\forall M) Q(M)$;

237. Рассмотрим предикат, заданный на множестве всех четырехугольников:

$A(Q)$: противоположные углы четырехугольника Q попарно конгруэнтны.

Прочитайте словами следующие высказывания и установите, являются ли они истинными:

а) $(\forall Q) A(Q)$; б) $(\exists Q) A(Q)$.

238. Рассмотрим предикат, заданный на множестве всех прямоугольников:

$C(F)$: у прямоугольника F имеются три конгруэнтные стороны.

Прочитайте словами следующие высказывания и установите, являются ли они истинными (ответ подтвердите чертежом):

а) $(\forall F) C(F)$; б) $(\exists F) C(F)$.

239. Начертите острый угол K со сторонами l_1 и l_2 , отметьте точки $A \in l_1$ и $B \in l_2$. Сделайте чертежи, доказывающие истинность следующих высказываний:

а) $(\exists M \in K) (d(M, l_1) = d(M, l_2))$;

б) $(\exists M \in K) (|MA| = |MB|)$;

в) $(\exists M \in K) (d(M, l_1) = d(M, l_2) \text{ и } |MA| = |MB|)$.

32. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

Пусть в треугольнике одна сторона принята за основание, а две другие — за боковые стороны.

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется *средней линией треугольника*.

Теорема. Средняя линия треугольника параллельна основанию. Длина средней линии равна половине длины основания.

Доказательство. Пусть ABD — треугольник, $[AB]$ — основание, $[MH]$ — средняя линия (рис. 158, а).

Обозначим (рис. 158, б) через N точку, симметричную M относительно H . Тогда $(AD) \parallel (NB)$ и $|BN| = |DM|$. Далее, так как M — середина стороны AD , то $|AM| = |DM|$ и потому $|AM| = |BN|$. Итак, отрезки AM и BN параллельны и конгруэнтны, т. е. $ABNM$ — параллелограмм. Отсюда вытекает, что $(MN) \parallel (AB)$. Далее $|MH| = \frac{1}{2} |MN| = \frac{1}{2} |AB|$.

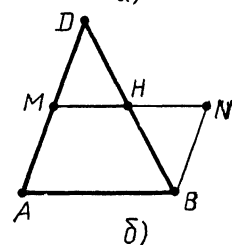
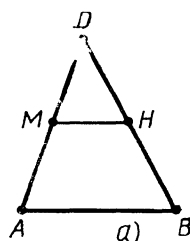


Рис. 158

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Точки M , P и Q — середины сторон треугольника ABC (рис. 159). Укажите конгруэнтные отрезки; укажите параллельные прямые.
- Докажите, что на рисунке 159 треугольники AMQ , BMP , CPQ и MPQ конгруэнтны.
- Точка M — середина стороны AB треугольника ABC (рис. 160). Через точку M проведена прямая l , параллельная стороне AC , до пересечения со стороной BC в точке P . Докажите, что MP — средняя линия треугольника ABC .

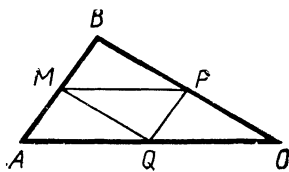


Рис. 159

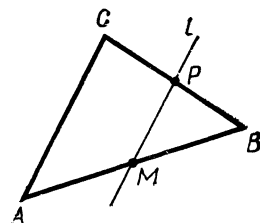


Рис. 160

ЗАДАЧИ

- Стороны треугольника имеют длины 6 см, 4 см и 3 см. Определите периметр треугольника, образованного его средними линиями.
- Длины сторон треугольника относятся как 3:4:6. Соединив середины всех сторон этого треугольника, получили треугольник с периметром 5,2. Определите длины сторон исходного треугольника.
- Докажите, что середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.
- Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.

244. Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

245. Периметр треугольника ABC равен 30. Через середины сторон $[AB]$ и $[AC]$ проведена средняя линия $[MN]$. Определите периметр треугольника AMN .

246. Точка B , принадлежащая одной из сторон угла MON , удалена от другой стороны на 12 см. Чему равно расстояние середины отрезка OB до второй стороны угла?

247. Докажите, что середины сторон квадрата являются вершинами квадрата.

33. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРАПЕЦИИ

Четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, называется *трапецией*.

Параллельные стороны называются основаниями трапеции, а две другие — ее боковыми сторонами (рис. 161). Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется *средней линией трапеции* (рис. 162).

Заметим, что у всякого параллелограмма две противоположные стороны параллельны, поэтому он является трапецией. Так как у параллелограмма *любые* две противоположные стороны параллельны, то, рассматривая параллелограмм как трапецию, мы можем принять за основания любую пару противоположных сторон (а две другие противоположные стороны будут считаться боковыми сторонами).

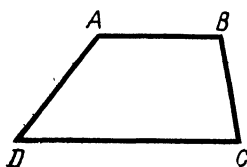


Рис. 161

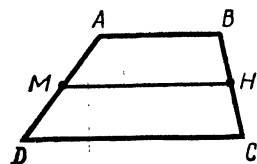


Рис. 162

Теорема 1. Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям. Длина средней линии равна половине суммы длин оснований.

Доказательство. Пусть (MN) — средняя линия трапеции $ABCD$ и A_1CBD_1 — трапеция, симметричная $ABCD$ относительно точки H (рис. 163). Тогда $(A_1D_1) \parallel (AD)$ и $|D_1M_1| = |DM|$. Далее, так как M — середина стороны AD , то $|AM| = |D_1M_1|$ и поэтому AMM_1D_1 — параллелограмм. Отсюда вытекает, что $(MN) \parallel (AB)$ и $|MN| = \frac{1}{2} |MM_1| = \frac{1}{2} |AD_1| = \frac{1}{2} (|AB| + |BD_1|) = \frac{1}{2} (|AB| + |CD|)$.

Теорема 2. Пусть параллельные между собой прямые $m_1, m_2, m_3, m_4, \dots$

пересекаются с прямой a в точках $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$, а с прямой b в точках $B_1, B_2, B_3, B_4, \dots$. Тогда если $|A_1A_2| = |A_2A_3| = |A_3A_4| = \dots$, то $|B_1B_2| = |B_2B_3| = |B_3B_4| = \dots$

Доказательство. Так как $m_1 \parallel m_3$, то $A_1B_1B_3A_3$ — трапеция (рис. 164). Прямая m_2 проходит через середину A_2 стороны A_1A_3 и параллельна основаниям этой трапеции. Так как средняя линия трапеции также проходит через A_2 и параллельна основаниям, то эта средняя линия расположена на прямой m_2 . Следовательно, точка B_2 , в которой прямая m_2 пересекает сторону B_1B_3 , является серединой отрезка B_1B_3 , т. е. $|B_1B_2| = |B_2B_3|$.

Таким же образом, рассматривая трапецию $A_2B_2B_4A_4$, найдем, что $|B_2B_3| = |B_3B_4|$ и т. д.

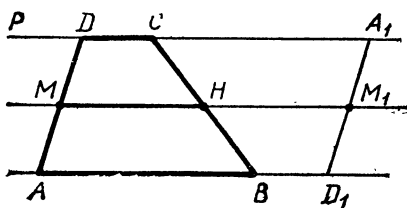


Рис. 163

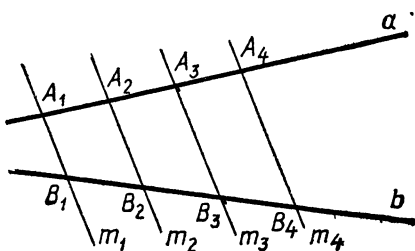


Рис. 164

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Через середину боковой стороны AB трапеции $ABCD$ проведена прямая l , параллельная основанию AD . Докажите, что прямая l пересекает сторону CD в ее середине (рис. 165).
- На рисунке 166 изображена сетка квадратов и прямая l . Зная, что $|AK| = 1,8$ см, $|CM| = 2,8$ см, определите длины отрезков BL , DN , PE и RF .
- Зная, что $|AE| = 2,2$ см, определите длину отрезка EF (рис. 166).
- В треугольнике ABC угол C прямой. Точки M и P делят катет AC на три

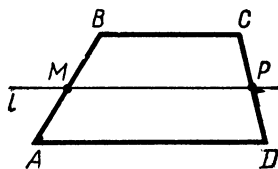


Рис. 165

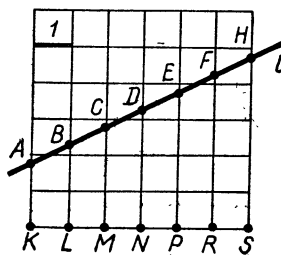


Рис. 166

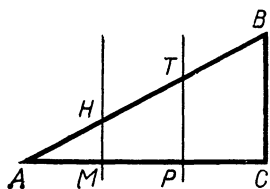


Рис. 167

конгруэнтные части. Докажите, что прямые, проведенные через точки M и P перпендикулярно катету AC , разделят гипотенузу AB на три конгруэнтные части (рис. 167).

ЗАДАЧИ

248. В трапеции $ABCD$ (AD —большее основание) диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD и служит биссектрисой угла BAD . Найдите длину стороны AD , если $\hat{D}=60^\circ$, а периметр трапеции равен 2 м.
249. Известно, что углы при одном из оснований трапеции конгруэнтны. Докажите, что: а) прямая, проходящая через середины оснований, является осью симметрии этой трапеции; б) боковые стороны трапеции конгруэнтны; в) диагонали трапеции конгруэнтны.
250. Одна из диагоналей трапеции делит среднюю линию на части, равные 8 и 16. Определите периметр трапеции, если каждая из диагоналей трапеции служит биссектрисой ее острого угла.
251. Найдите отношение длин параллельных сторон трапеции, в которой средняя линия делится диагоналями на три конгруэнтные части.
252. Отложите на стороне OM угла MON от вершины O последовательно пять конгруэнтных отрезков, а на стороне ON один отрезок OA . Разделите с помощью угольника и линейки отрезок OA на пять конгруэнтных частей.
253. Проведите прямую a , отложите на ней последовательно шесть конгруэнтных отрезков. Через концы построенных отрезков проведите параллельные между собой прямые. Докажите, что построенные параллельные прямые находятся на равном расстоянии друг от друга.
-
254. Одна из сторон треугольника разделена на четыре конгруэнтные части. Через точки деления проведены прямые, параллельные одной из двух других сторон. Длина меньшего из отрезков, заключенных внутри треугольника, равна 2. Чему равны остальные отрезки и сторона треугольника, параллельная им?
255. Концы отрезка AB расположены по одну сторону прямой a на расстоянии 3 и 7 от нее. На каком расстоянии от прямой a находится середина отрезка AB ?
256. Начертите отрезок AB и разделите его с помощью циркуля, угольника и линейки на три конгруэнтные части.

34. ИЗМЕРЕНИЕ ДЛИНЫ ОТРЕЗКА

Пусть дан отрезок MN , принятый за единицу измерения длин, и отрезок AK , длину которого нужно измерить. Для нахождения длины отрезка AK поступают следующим образом.

Прежде всего от одного из концов отрезка AK , например от точки A , откладывают на отрезке AK один за другим отрезки, конгруэнтные единице измерения MN , до тех пор, пока откладывание возможно. Если окажется, что отрезок MN отложился на $[AK]$ в точности, например, 5 раз (рис. 168), то длина отрезка AK равна 5, т. е. $|AK| = 5$.

Возможно, однако, что, отложив отрезок MN на отрезке AK несколько раз, мы не попадем точно в точку K , а останется отрезок, меньший $[MN]$. На рисунке 169 отрезок MN отложился 5 раз и получился остаток FK , причем $|FK| < |MN|$. В таком случае справедливо двойное неравенство:

$$5 < |AK| < 6.$$

Принято говорить, что с точностью до единицы число 5 — длина отрезка AB , взятая *с недостатком*, а число 6 — длина этого отрезка *с избытком*.

Если нас не устраивает такое приближение (с точностью до единицы), измеряют остаток FK , откладывая на нем десятую часть отрезка MN . На рисунке 170 в остатке FK точно отложилось 7 отрезков, конгруэнтных десятой части отрезка MN , и потому длина отрезка AK равна пяти целым и семи десятым:

$$|AK| = 5,7.$$

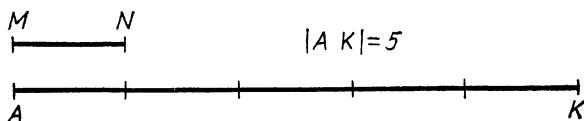


Рис. 168

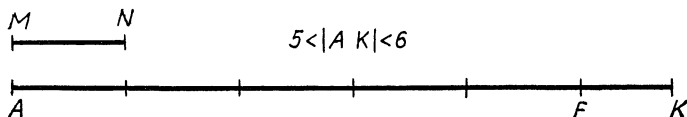


Рис. 169

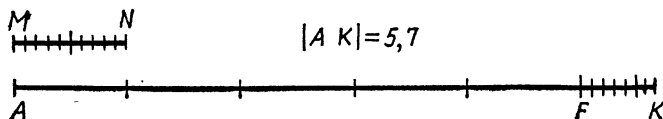


Рис. 170

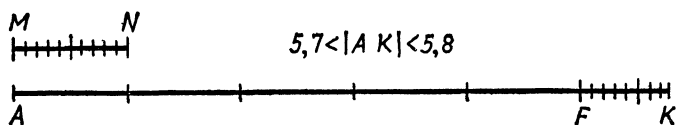


Рис. 171

Если же десятая доля точно не уложится несколько раз в остатке FK , то мы узнаем длину отрезка AK с точностью до одной десятой лишь приближенно. На рисунке 171 десятая часть отрезка MN отложилась 7 раз на $[FK]$ и еще остался остаток, меньший десятой доли единицы измерения. В этом случае

$$5,7 < |AK| < 5,8.$$

С точностью до одной десятой длина отрезка AK , взятая с недостатком, равна 5,7, а с избытком 5,8.

Если и эта точность не устраивает, мы можем откладывать на получившемся остатке сотую долю единицы измерения. В результате получим длину отрезка AK с точностью до одной сотой. Например:

$$5,74 \leq |AK| < 5,75.$$

Таким образом мы можем измерить длину отрезка AK с любой интересующей нас точностью.

Разумеется, здесь идет речь о *геометрических* отрезках, которые мы считаем возможным совершенно точно откладывать и делить на сколь угодно мелкие части (при реальных измерениях следует учитывать погрешности измерительных приборов, молекулярное строение вещества и т. п.).

Процесс измерения может либо закончиться через несколько шагов, и тогда мы получим выражение длины отрезка в виде конечной десятичной дроби, либо же процесс измерения в том виде, как он описан выше, никогда не закончится, т. е. приведет к *бесконечной* десятичной дроби. Например, если отрезок AK равен в точности одной трети отрезка MN , т. е. его длина равна $\frac{1}{3}$, то описанный выше процесс измерения дает в качестве длины этого отрезка бесконечную десятичную дробь:

$$|AK| = 0,333\dots$$

На практике, конечно, не используют бесконечные десятичные дроби или даже конечные десятичные дроби с очень большим числом знаков, а ограничиваются вычислением длины с нужной степенью точности.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Длина отрезка AB равна 3,6. Сколько раз откладывается единица измерения в отрезке AB ? Сколько раз откладывается десятая доли единицы измерения? Чему равна длина отрезка AB с точностью до единицы с избытком? С недостатком?
- б) Длина отрезка PT с точностью до одной десятой, взятая с недостатком, равна 8,4. Чему равна длина того же отрезка, измеренного с той же точностью с избытком?
- в) Обозначим через $R(F)$ предикат: „длина отрезка F — целое число“. При каких значениях F из множества отрезков, изображенных на рисунке 172, $R(F)$ превращается в истинное высказывание?

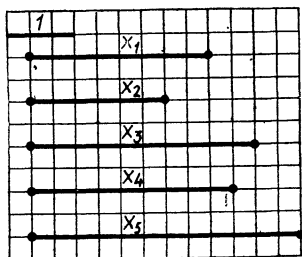


Рис. 172

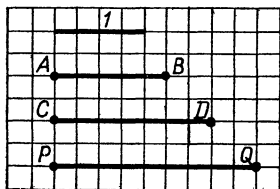


Рис. 173

ЗАДАЧИ

257. Известно, что $|AC| = 12,4$, $|AB| = 8$, $|BC| = 4,4$, $|BD| = 10,7$, $|CD| = 6,3$. Сделайте чертеж.
258. Чему равна длина каждого из отрезков на рисунке 173 с недостатком и с избытком:
а) с точностью до 1; б) с точностью до 0,1?
Запишите ответы в виде двойных неравенств.
259. Точки A, B, C и D лежат на числовой прямой и имеют координаты: $-6; -3; 0; 4$. Найдите длины отрезков AB, BC, BD, CD .
260. Обозначим через $P(y)$ предикат: «длина отрезка y равна 2». При каких значениях y из множества изображенных на рисунке 174 отрезков предикат $P(y)$ превращается в истинное высказывание?
261. Найдите с помощью масштабной линейки длины изображенных на рисунке 175 отрезков: а) с точностью до 1 см; б) с точностью до 0,1 см. Запишите ответы в виде двойных неравенств.

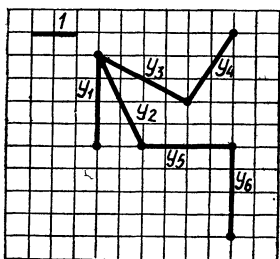


Рис. 174

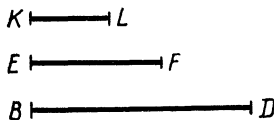


Рис. 175

262. Постройте точки $A(-2)$, $B(-2,5)$, $C(-1,2)$, $D(4,2)$, $M(-2,7)$, $K(4)$, приняв сантиметр за единичный отрезок числовой прямой. Определите длины отрезков AB , CD и MK : а) без масштабной линейки; б) с помощью масштабной линейки.

35. ДЕЙСТВИЯ С ДЛИНАМИ ОТРЕЗКОВ

Над длинами можно выполнять арифметические действия. Например, на рисунке 176

$$|AB| = |AC| + |CB| = 2 + 3 = 5.$$

Однако такая запись говорит не все о величине отрезка AB : здесь не указано, с помощью какой единицы производилось измерение. Нередко единицу измерения указывают в скобках после выполнения действий. Например, на рисунке 176 за единицу длины был принят сантиметр. Поэтому вычисления записываются так:

$$|AB| = 2 + 3 = 5 \text{ (см)}.$$

Обозначение (см), стоящее в конце, можно рассматривать как сокращенную запись придаточного предложения типа «причем за единицу измерения принят сантиметр». Таким образом, запись

$$|AB| = 5 \text{ (см)}$$

можно прочесть так: длина отрезка AB равна 5, причем за единицу измерения был принят сантиметр.

В геометрии и физике применяется и другой способ указания единицы измерения: пишут

$$|AB| = 5 \text{ см}$$

(без скобок) и считают правую часть как бы произведением числа 5 и наименования см. Такое соглашение позволяет применять к этим «произведениям» законы арифметических действий. Например, вычисление длины отрезка на рисунке 176 можно при этом соглашении записать так:

$$|AB| = 2 \text{ см} + 3 \text{ см} = (2 + 3) \text{ см}.$$

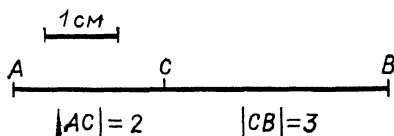


Рис. 176

Здесь применен распределительный закон: наименование (см) вынесено за скобки.

При нахождении длин отрезков применяются разные единицы измерения. До Великой Октябрьской социалистической

революции в России использовали в качестве единиц измерения вершок, аршин, сажень. В Англии до недавнего времени использовали дюймы и футы.



Рис. 177

Сейчас общепринятыми единицами измерения являются миллиметр, сантиметр, дециметр, метр, километр. Однако в ряде случаев удобно применять и другие единицы измерения. Например, в физике используется ангстрем (десятиллионная часть сантиметра), а в астрономии нередко применяется в качестве единицы измерения световой год (примерно 9300 млрд. км).

Поэтому часто приходится сопоставлять длину некоторого отрезка, измеренного с помощью одной единицы, с длиной того же отрезка, измеренного с помощью другой единицы.

Пусть, например, длина отрезка PQ равна 5,32 дм. Так как в каждом дециметре содержится 10 см, то длина того же отрезка в сантиметрах равна $5,32 \cdot 10 = 53,2$.

Принятое соглашение позволяет это вычисление записать так:

$$|PQ| = 5,32 \text{ дм} = 5,32 \cdot (10 \text{ см}) = (5,32 \cdot 10) \text{ см} = 53,2 \text{ см}.$$

Здесь к «произведению» числа на наименование применен сочетательный закон умножения.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Какие из следующих высказываний истинны: 1) длина одного и того же отрезка может выражаться различными числами; 2) длины неконгруэнтных отрезков могут выражаться одним и тем же числом; 3) длины любых двух конгруэнтных отрезков при одной и той же единице измерения выражаются одним и тем же числом?
- Отрезок AT разбит на конгруэнтные между собой отрезки (рис. 177). Чему равна длина отрезка AT , если за единицу измерения принят отрезок AB ? Отрезок AC ? Отрезок AM ?
- Приняв отрезок AB за единицу измерения, нашли, что $|MK| = 5$. Определите длину отрезка MK в сантиметрах, если известно, что $|AB| = 3$ см. Какова длина того же отрезка в дециметрах?

ЗАДАЧИ

- Найдите периметр параллелограмма, стороны которого имеют длины 8 см и 12 дм.
- Известно, что $|AK| = |AC| + |KC|$, $|AK| = 82$ м, $|AC| = 170$ дм. Найдите длину отрезка KC .
- Длина отрезка AB равна 1483 мм. Чему равна длина того же отрезка в дециметрах?
- Дано, что $|AB| = 0,3$ м, $|AC| = 18$ см. Что можно сказать о длине отрезка BC ?

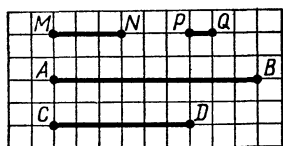


Рис. 178

267. Известно, что $|MC| = 18,7$ дм. Выразите длину отрезка MC в миллиметрах, применяя к наименованиям законы арифметических действий.

268. На отрезке AB длиной 18 дм взяты такие точки C и D , что $|AD| = 0,35$ м, $|CB| = 5$ мм. Найдите длину отрезка CD .

36. ОТНОШЕНИЕ ДЛИН ОТРЕЗКОВ

На рисунке 178 изображены отрезки AB и CD . Если за единицу измерения принять отрезок MN , то получим:

$$|AB| = 3, \quad |CD| = 2,$$

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Примем теперь за единицу измерения отрезок PQ . Тогда

$$|AB| = 9, \quad |CD| = 6, \quad \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{9}{6} = 1,5.$$

Таким образом, несмотря на изменение единицы измерения, с помощью которой найдены длины отрезков AB и CD , отношение длин этих отрезков осталось тем же самым. Следующая теорема утверждает, что это свойство отношений длин отрезков справедливо в любом случае.

Теорема. *Отношение длин двух отрезков не зависит от выбора единицы измерения.*

Доказательство. Пусть, например, длины отрезков AB и CD измерены в сантиметрах:

$$|AB| = a \text{ см}, \quad |CD| = b \text{ см}.$$

Отношение длин этих отрезков равно $\frac{a}{b}$. Возьмем теперь другую единицу измерения, например миллиметр. Тогда

$$|AB| = a \cdot (10 \text{ мм}) = 10a \text{ мм}, \quad |CD| = b \cdot (10 \text{ мм}) = 10b \text{ мм}.$$

Отношение длин в этом случае равно $\frac{10a}{10b}$. Разделив числитель и знаменатель на 10, получаем для отношения длин прежнее значение $\frac{a}{b}$.

Приведенное рассуждение применимо к любым единицам измерения: при переходе от одной единицы к другой числитель и знаменатель умножаются на одно и то же число, так что отношение не изменяется.

Замечание. Доказанную теорему можно пояснить следующим образом. Если $|AB| = a$ см, $|CD| = b$ см, то $\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{a \text{ см}}{b \text{ см}} = \frac{a}{b}$. Здесь как бы произведено деление числителя и знаменателя дроби на наименьшее см и в окончательный результат единица измерения не входит. Такое «деление» на наименование широко используется в физике.

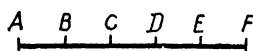


Рис. 179

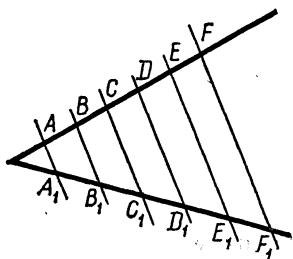


Рис. 180

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Известно, что $|AB| = 5$ дм, $|CD| = 2$ см. Можно ли утверждать, что отношение длин этих отрезков равно $\frac{5}{2}$?
- На рисунке 179 отрезки AB, BC, CD, DE и EF конгруэнтны. Найдите отношение длин отрезков AD и AF , приняв за единицу измерения: 1) отрезок AF ; 2) отрезок AB .
- На рисунке 180 прямые, проведенные через точки A, B, C, D, E и F , параллельны, причем $|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF|$. Найдите отношение длин отрезков A_1C_1 и C_1F_1 . Какой отрезок удобнее всего принять за единицу измерения, чтобы найти это отношение?
- Какие из следующих высказываний истинны: 1) существует $\triangle ABC$, у которого $\hat{C} = 90^\circ$ и $\frac{|AC|}{|AB|} = 1$; 2) существует $\triangle ABC$, у которого $\hat{C} = 90^\circ$ и $\frac{|AC|}{|BC|} = 1$; 3) существует $\triangle ABC$, у которого $\hat{C} = 90^\circ$ и $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{1}{2}$; 4) существует $\triangle ABC$, у которого $\hat{C} = 90^\circ$ и $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{1}{2}$?

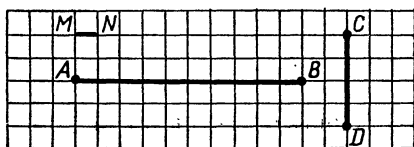


Рис. 181

ЗАДАЧИ

- 269.** Найдите отношение длин отрезков AB и CD (рис. 181), приняв за единицу измерения:
- $[MN]$; б) 1 см; в) $[CD]$.

270. Построены такие точки A, B, C и D , что $|AC| + |CB| = |AB|$,
 $|AB| + |BD| = |AD|$, $|AB| = 10$, $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{2}{3}$, $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{3}{2}$. Най-
 дите отношение отрезков CB и BD .
271. На отрезке PQ длиной 1 м 8 см взята точка M на рас-
 стоянии 2,3 дм от точки P . Найдите $\frac{|PM|}{|MQ|}$.

272. На отрезке AB взята такая точка C , что $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{3}{4}$.
 Найдите $\frac{|AC|}{|AB|}$.

273. Постройте на прямой точки M, K, O, P и L , для которых
 $|MK| = 7,5$ см, $|MO| + |OK| = |MK|$, $|PM| + |MK| = |PK|$,
 $\frac{|MO|}{|OK|} = \frac{|PM|}{|MK|} = \frac{2}{3}$.

37. ТЕОРЕМА О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ДВУХ ПРЯМЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРЯМЫМИ

Теорема. Если три параллельные прямые пересечены двумя другими прямыми, первая из которых пересекает параллельные в точках A, B и C , а вторая — соответственно в точках A_1, B_1 и C_1 , то

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A_1B_1|}{|B_1C_1|}. \quad (1)$$

Доказательство. Найдем отношение $\frac{|AB|}{|BC|}$ с точностью до 0,1. Для этого, разделив отрезок BC на 10 конгруэнтных частей, будем откладывать десятую часть на отрезке AB от точки B . Допустим, что десятая часть отложилась на $[AB]$ 14 раз (точно или с некоторым остатком, рис. 182), т. е.

$$1,4 \leq \frac{|AB|}{|BC|} < 1,5.$$

Проведем теперь через все точки деления прямые, параллельные прямым AA_1, BB_1, CC_1 . Тогда на прямой A_1C_1 получатся конгруэнтные между собой отрезки, причем на $[B_1C_1]$ откладывается точно 10 таких отрезков, а на $[A_1B_1]$ откладывается 14 отрезков и остается остаток, меньший десятой доли отрезка B_1C_1 . Таким образом,

$$1,4 \leq \frac{|A_1B_1|}{|B_1C_1|} < 1,5,$$

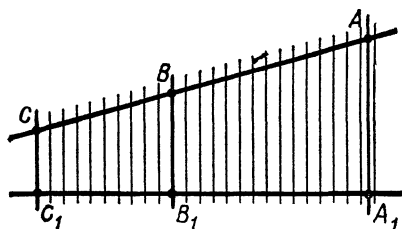


Рис. 182

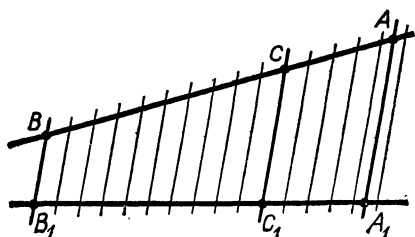


Рис. 183

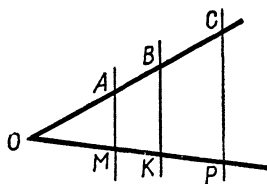


Рис. 184

т. е. отношения $\frac{|AB|}{|BC|}$ и $\frac{|A_1B_1|}{|B_1C_1|}$ равны с точностью до 0,1.

Если мы вычислим эти отношения с точностью до 0,01, то таким же способом убедимся, что они и с этой точностью равны. То же справедливо с любой большей точностью: до 0,001, 0,0001 и т. д.

Итак, отношения $\frac{|AB|}{|BC|}$ и $\frac{|A_1B_1|}{|B_1C_1|}$ равны с *любой* точностью и, значит, формула (1) справедлива.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Почему отрезки, получившиеся на прямой A_1C_1 (рис. 182), конгруэнтны?
- Проведите доказательство теоремы для случая, когда точка B не лежит *между* точками A и C (рис. 183).
- Что означает слово «соответственно» в формулировке теоремы? Укажите соответственные друг другу точки и отрезки на рисунке 183.
- На рисунке 184 $(MA) \parallel (KB) \parallel (PC)$. Какие из следующих равенств справедливы:

- $\frac{|OM|}{|OK|} = \frac{|AO|}{|OB|}$;
- $\frac{|OC|}{|OA|} = \frac{|OM|}{|OP|}$;
- $\frac{|OM|}{|KP|} = \frac{|OA|}{|BC|}$;
- $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|MK|}{|KP|}$?

ЗАДАЧИ

274. На рисунке 185 $(AM) \parallel (BN) \parallel (CP)$. Проставьте пропущенные числители и знаменатели дробей так, чтобы получились верные равенства:

- $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{\quad}{|NP|}$;
- $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|MN|}{\quad}$;
- $\frac{|MP|}{\quad} = \frac{\quad}{|BC|}$;
- $\frac{\quad}{\quad} = \frac{|MN|}{|MP|}$;
- $\frac{\quad}{\quad} = \frac{|BC|}{|AC|}$.

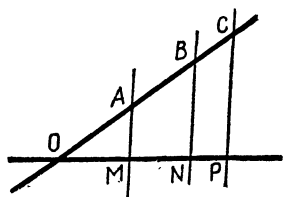


Рис. 185

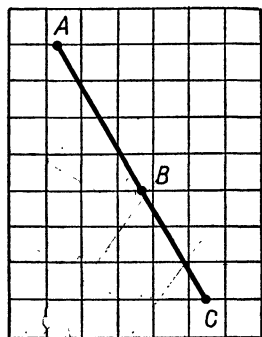


Рис. 186

275. Известно, что $(AA_1) \parallel (BB_1) \parallel (CC_1) \parallel (DD_1)$. Точки A, B, C и D принадлежат прямой l , точки A_1, B_1, C_1 и D_1 — прямой k :

а) выпишите несколько отношений, равных $\frac{|AB|}{|A_1B_1|}$;

б) зная, что $|AB| = 2,4$, $|BC| = 0,12$, $|CD| = 3,6$, $|A_1B_1| = 0,8$, найдите длины отрезков B_1C_1 , B_1D_1 , C_1D_1 .

276. На боковых сторонах трапеции $ABCD$ взяты такие точки M и P , что (MP) параллельно основанию AD . Известно, что $|AM| = 7$ см, $|PD| = 5$ см, а сумма длин боковых сторон равна 36 см. Определите длины боковых сторон.

277. На прямой a взяты точки C, D, E, F и M , а на прямой b — точки C_1, D_1, E_1, F_1 и M_1 , причем прямые MM_1, CC_1, DD_1, FF_1 и EE_1 параллельны. Известно, что $\frac{|MD|}{|M_1D_1|} = 1,4$, $|CD| = 0,7$, $|D_1F_1| = 0,3$, $|DE| = 5,22$.

Найдите, если это возможно, длины отрезков MC , DF , FE , M_1C_1 , C_1D_1 , F_1E_1 .

278. На прямой p взяты точки A, B, C и D , а на прямой q — точки A_1, B_1, C_1 и D_1 , причем $(AA_1) \parallel (BB_1) \parallel (CC_1) \parallel (DD_1)$. Известно, что $\frac{|BC|}{|B_1C_1|} = 1,6$. Найдите:

а) $|CD|$, если $|C_1D_1| = 0,4$;

б) $|B_1D_1|$, если $|BD| = 0,4$;

в) $\frac{|A_1B_1|}{|AB|}$.

279. Для точек, изображенных на рисунке 186 на фоне квадратной сетки, известно, что разность длин отрезков AB и BC равна 1,2. Найдите длины отрезков AB и BC .

38. СЛЕДСТВИЕ ИЗ ТЕОРЕМЫ О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ДВУХ ПРЯМЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ

Из доказанной в предыдущем пункте теоремы выводится еще одна теорема. Она названа *следствием*. (Вообще, следствием в математике принято называть такую теорему, которая несложно выводится из ранее доказанной.)

Следствие. Пусть l и m — две прямые, пересекающиеся в точке O , и пусть $A \in l$, $B \in l$ и $C \in m$, $D \in m$ — такие отличные от O точки, что $(AC) \parallel (BD)$. Тогда

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|} = \frac{|AC|}{|BD|}.$$

Доказательство. Равенство

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}$$

непосредственно вытекает из доказанной теоремы (чтобы применить ее, надо провести через точку O прямую, параллельную AC , рис. 187).

Далее проведем $(CK) \parallel (AB)$ (рис. 188). Тогда по той же теореме

$$\frac{|OC|}{|OD|} = \frac{|BK|}{|BD|}$$

(прямые OD и BD пересечены параллельными прямыми OB и CK). Но $|AC| = |BK|$, так как $ABKC$ — параллелограмм.

Поэтому

$$\frac{|OC|}{|OD|} = \frac{|AC|}{|BD|}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) На рисунке 189 $(AP) \parallel (BR) \parallel (CS) \parallel (DT)$. Какие из следующих равенств справедливы:

1) $\frac{|AD|}{|MD|} = \frac{|PT|}{|MT|};$

2) $\frac{|AC|}{|BD|} = \frac{|PS|}{|RT|};$

3) $\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{|MP|}{|MR|};$

4) $\frac{|MC|}{|MS|} = \frac{|BD|}{|RT|};$

5) $\frac{|BR|}{|DT|} = \frac{|MB|}{|MD|};$

6) $\frac{|BR|}{|CS|} = \frac{|MS|}{|MR|}?$

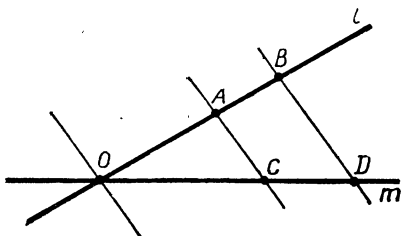


Рис. 187

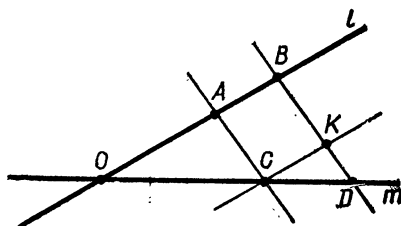


Рис. 188

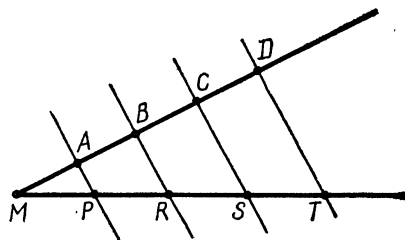


Рис. 189

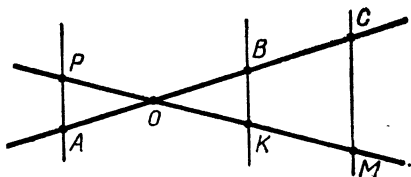


Рис. 190

б) На рисунке 190 прямые PA , BK и CM параллельны. Какие из следующих равенств верны:

$$1) \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|PK|}{|KM|}; \quad 2) \frac{|OC|}{|OA|} = \frac{|CM|}{|PA|}; \quad 3) \frac{|OC|}{|OA|} = \frac{|OM|}{|OP|}?$$

ЗАДАЧИ

280. На луче OP последовательно отложены отрезки OA , AB и BC , длины которых соответственно равны 8 см, 4 см и 3 см. Через точки A , B и C проведены параллельные между собой прямые m_1 , m_2 , m_3 . Определите расстояния между параллельными прямыми, если $d(O, m_1) = 6$ см.

281. Возьмите произвольный отрезок AB и постройте на нем такую точку M , что $\frac{|AM|}{|MB|} = \frac{2}{5}$.

282. На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты такие точки M , D и F , что $(MF) \parallel (BC)$, $(FD) \parallel (AB)$. Проставьте пропущенные числители и знаменатели дробей так, чтобы получились верные равенства:

$$а) \frac{|AF|}{|AC|} = \frac{|BC|}{|BC|};$$

$$б) \frac{|AB|}{|FD|} = \frac{|BC|}{|FC|} = \frac{|BC|}{|FC|};$$

$$в) \frac{|AF|}{|FC|} = \frac{|MF|}{|MB|} = \frac{|MF|}{|MB|}.$$

283. В трапеции $ABCD$ длина средней линии равна 10,5 см. Продолжения боковых сторон AB и CD пересекаются в точке M . Известно, что $|MA| = 16$ см, $|MC| = 9$ см, $|MB| = 12$ см. Найдите длины всех сторон этой трапеции.

284. Известно, что $|AB| = |BC| = 8$, $|AC| = 4$. На отрезках AB и BC взяты такие точки H и T , что $|AH| = |HT| = |TC|$. Определите длину отрезка HT .

285. Из вершины B параллелограмма $ABCD$ проведен луч, пересекающий сторону CD в точке M и прямую AD в точке K . Вычислите длину отрезка DK , если $|AB| = 3,6$, $|AD| = 4,8$, $|CM| = 0,9$.

286. В трапеции с основаниями AB и CD длины сторон равны $|AB| = 6,2$, $|BC| = 3,5$, $|CD| = 9,3$, $|DA| = 5$. Боковые стороны трапеции продолжены до пересечения в точке M . Определите длины отрезков AM и BM .

287. Прямые AD и BC пересекаются в точке M , причем $(AB) \parallel (DC)$.

Известно, что $\frac{|AM|}{|MB|} = 0,8$, $|MD| = 25,6$, $|MB| = 1,6$. Найдите:

а) $|CM|$; б) отношение $\frac{|AD|}{|CB|}$; в) отношение $\frac{|AB|}{|CD|}$.

288. В трапеции $ABCD$ меньшее основание CD имеет длину 15 см, а боковая сторона BC — длину 9 см. Продолжения боковых сторон пересекаются в точке P , удаленной от C и D соответственно на 10 см и 12 см. Найдите длины двух других сторон трапеции.
289. На продолжении стороны AB параллелограмма $ABCD$ отложен отрезок BM , длина которого равна половине длины стороны AB . Отрезки MD и BC пересекаются в точке H . Определите $|BC|$, если $|BH| = 1,6$ см.
290. В треугольнике ABC с прямым углом C длина гипотенузы равна 13 см, а длина катета BC равна 10 см. Точка M , расположенная на гипотенузе, отстоит от вершины A на 7 см. Найдите расстояние от M до прямой AC .

39. ИЗМЕРЕНИЕ ВЕЛИЧИН ВПИСАННЫХ УГЛОВ

Проведем в окружности две хорды, имеющие общий конец. Угол, меньший развернутого, образованный этими хордами, называется *вписанным углом*. На рисунке 191 углы 1, 2 и 3 вписанные.

Пересечение вписанного угла с окружностью представляет собой некоторую дугу. Принято говорить, что вписанный угол *опирается* на эту дугу. На рисунке 191 вписанный угол 1 опирается на дугу AC , а вписанный угол 2 — на дугу MP . Заметим, что дуга, на которую опирается вписанный угол, не содержит вершины этого угла.

Угол, образованный двумя радиусами, называется *центральный углом*. Он может быть как меньше, так и больше развернутого угла. Пересечение центрального угла с окружностью представляет собой некоторую дугу. Принято говорить, что центральный угол *опирается* на эту дугу. На рисунке 192 центральный угол 1 опирается на дугу DE , а центральный угол 2 — на дугу KL .

Теорема. *Величина вписанного угла вдвое меньше величины центрального угла, опирающегося на ту же дугу.*

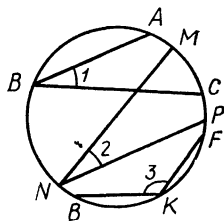


Рис. 191

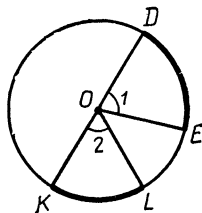


Рис. 192

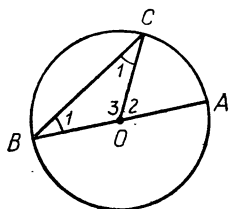


Рис. 193

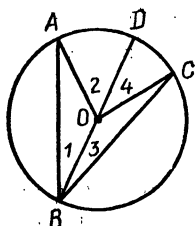


Рис. 194

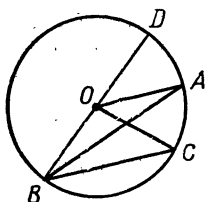


Рис. 195

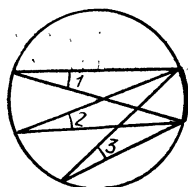


Рис. 196

Доказательство. Могут представиться следующие три случая, которые мы рассмотрим отдельно: центр окружности лежит:

а) на одной из сторон вписанного угла;

б) внутри этого угла;

в) вне угла.

а) Пусть центр O лежит на стороне BA вписанного угла ABC (рис. 193). Проведем радиус OC . Образовавшийся треугольник BOC равнобедренный, и потому углы B и C (обозначенные на чертеже цифрами 1) конгруэнтны. Имеем:

$$\hat{2} = 180^\circ - \hat{3}; \quad \hat{3} = 180^\circ - 2 \cdot \hat{1},$$

откуда вытекает, что $\hat{2} = 2 \cdot \hat{1}$. Следовательно,

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC}.$$

б) Пусть теперь центр O лежит внутри вписанного угла ABC . Проведем диаметр BD (рис. 194) и радиусы OA и OC . Согласно уже рассмотренному случаю а)

$$\hat{1} = \frac{1}{2} \cdot \hat{2}, \quad \hat{3} = \frac{1}{2} \cdot \hat{4}.$$

Складывая эти равенства, получаем:

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC}.$$

в) Пусть, наконец, центр O лежит вне вписанного угла ABC . Как и в предыдущем случае, проведем диаметр BD и радиусы OA и OC (рис. 195). Тогда

$$\widehat{CBD} = \frac{1}{2} \widehat{COD}, \quad \widehat{ABD} = \frac{1}{2} \widehat{AOD}.$$

Вычитая из первого равенства второе, находим, что и в этом случае

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC}.$$

Следствие. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, конгруэнтны (рис. 196).

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

а) Какие из углов на рисунке 197 являются вписанными? На какую дугу опирается каждый из вписанных углов?

б) В окружность с центром O вписан треугольник ABC .

Вычислите углы треугольника, если

$$\widehat{AOB} = 140^\circ, \widehat{COB} = 100^\circ, \widehat{COA} = 120^\circ.$$

в) Докажите, что вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой.

г) В окружности проведены радиусы OA , OB и OC таким образом, что $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120^\circ$. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

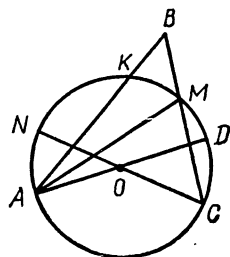


Рис. 197

ЗАДАЧИ

291. В окружность вписан треугольник, два угла которого имеют величины 47° и 39° . Определите углы, под которыми видны стороны этого треугольника из центра окружности.

292. Докажите, что сумма величин двух противоположных углов всякого вписанного в окружность четырехугольника равна 180° .

293. Прямая AB касается окружности в точке M , хорда MK образует с лучом MB острый угол. Вписанный угол, опирающийся на дугу MK , имеет величину 49° . Найдите $\widehat{KMB}$.

294. Сторона равностороннего треугольника служит диаметром окружности. Определите величины центральных углов, образованных радиусами, проведенными в точки пересечения окружности со сторонами треугольника.

295. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, проведенной из вершины прямого угла.

296. Равнобедренный треугольник вписан в окружность, причем центральный угол, стороны которого проходят через концы боковой стороны, имеет величину 24° . Определите величины углов треугольника.

297. В окружность вписан равносторонний треугольник ABC . Точка M лежит на дуге, меньшей полуокружности, с концами A и B . Найдите $\widehat{AMC}$.

40. ОТРИЦАНИЕ

Из всякого высказывания можно получить новое высказывание, отрицая его, т. е. утверждая, что исходное высказывание не имеет места, не выполняется. Для записи отрицания используется знак $\neg$ (его называют знаком отрицания или, короче, знаком «не»).

Обозначим через A высказывание «в нашем классе менее 100 учеников». Его отрицание $\neg A$ можно прочесть словами так: «в нашем классе не менее 100 учеников». В данном случае высказывание A истинно, а его отрицание $\neg A$ ложно.

В качестве геометрического примера рассмотрим следующее высказывание: «в прямоугольном треугольнике с катетами, имеющими длины 4 и 5, длина гипотенузы равна 9» (рис. 198). Его отрицание утверждает, что в прямоугольном треугольнике с катетами длины 4 и 5 длина гипотенузы не равна 9. Здесь первоначальное высказывание ложно, а его отрицание истинно.

Из двух высказываний, одно из которых является отрицанием другого, одно истинно, а другое ложно.

В том случае, если высказывание выражено простым предложением с одним сказуемым, для образования его отрицания достаточно добавить «не» к сказуемому (а если частица «не» уже стояла перед сказуемым, то для образования отрицания достаточно опустить эту частицу). Например:

A : Париж находится в Италии;

$\neg A$: Париж не находится в Италии.

Другой пример:

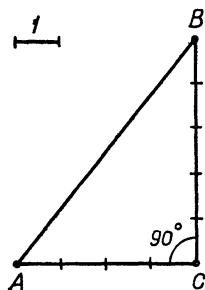


Рис. 198

B : треугольники ABC и ADC на рисунке 199 не конгруэнтны;

$\neg B$: треугольники ABC и ADC на рисунке 199 конгруэнтны.

Однако такой простой способ образования отрицаний применим только в том случае, если в высказывании нет знаков $\forall$ и $\exists$ (или равнозначных им слов).

Рассмотрим, например, высказывание:

P : $(\forall \triangle ABC) (\angle A \cong \angle B)$.

Его отрицание получим, поставив знак $\neg$ перед всем высказыванием:

$$\neg P: \neg(\forall \triangle ABC) (\angle A \cong \angle B). \quad (1)$$

Словами высказывание $\neg P$ можно прочитать так: «не для любого $\triangle ABC$ угол A конгруэнтен углу B ». Это значит, что найдется (существует) $\triangle ABC$, в котором не имеет места соотношение $\angle A \cong \angle B$:

$$\neg P: (\exists \triangle ABC) \neg(\angle A \cong \angle B). \quad (2)$$

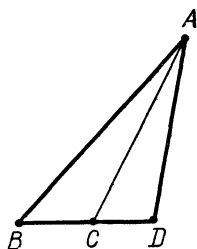


Рис. 199

Итак, чтобы образовать отрицание высказывания, начинающегося знаком $\forall$, можно либо поставить знак $\neg$ перед всем высказыванием (см. (1)), либо заменить $\forall$ на $\exists$ и затем поставить знак $\neg$ перед остальной частью высказывания (см. (2)).

Аналогично получается отрицание высказывания, начинающегося знаком $\exists$. Рассмотрим для примера высказывание:

$$M: (\exists ABCD) (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 400^\circ).$$

Его отрицание получим, поставив знак $\neg$ перед всем высказыванием:

$$\neg M: \neg(\exists ABCD) (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 400^\circ). \quad (3)$$

Словами: «не существует четырехугольника $ABCD$, сумма величин углов которого равна 400° ». Это означает, что какой бы четырехугольник $ABCD$ мы ни взяли, сумма величин его углов не будет равна 400° :

$$\neg M: (\forall ABCD) \neg(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 400^\circ). \quad (4)$$

Итак, чтобы образовать отрицание высказывания, начинающегося знаком $\exists$, можно либо поставить знак $\neg$ перед всем высказыванием (см. (3)), либо заменить знак $\exists$ на $\forall$ и затем поставить знак $\neg$ перед остальной частью высказывания (см. (4)).

Если условимся знаки $\forall$ и $\exists$ называть *противоположными*, то правило составления отрицания можно сформулировать так: чтобы образовать отрицание высказывания, начинающегося одним из знаков $\forall$ или $\exists$, можно либо поставить знак $\neg$ перед всем высказыванием, либо: 1) заменить начальный знак ($\forall$ или $\exists$) на противоположный и 2) поставить знак $\neg$ перед остальной частью высказывания.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Сформулируйте отрицания следующих предикатов, заданных на множестве всех четырехугольников:

$A(F)$: четырехугольник F является параллелограммом;

$B(F)$: четырехугольник F не является трапецией.

б) Дежурный по классу сообщил учителю: «Все ученики нашего класса имеют дневники с собой». Выяснилось, однако, что он сказал неправду. Как должен был сформулировать свое сообщение дежурный, чтобы оно было истинным?

в) Рассмотрим высказывания:

M : в любом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD конгруэнтны;

N : в любом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD не конгруэнтны.

1) Докажите, что высказывание N не является отрицанием высказывания M . 2) Образуйте отрицания высказываний M и N . 3) Какие из высказываний M , N , $\neg M$, $\neg N$ истинны?

г) Рассмотрим высказывания:

M : существует четырехугольник $ABCD$, у которого стороны AB и CD конгруэнтны;

K : существует четырехугольник $ABCD$, у которого стороны AB и CD не конгруэнтны.

1) Докажите, что высказывание K не является отрицанием высказывания M . 2) Образуйте отрицания высказываний M и K . 3) Какие из высказываний M , K , $\neg M$, $\neg K$ истинны?

ЗАДАЧИ

298. Начертите прямоугольник $ABCD$, у которого $|AC| = 28$ мм. Пусть через N обозначено высказывание: периметр прямоугольника $ABCD$ меньше 5,5 см. Сформулируйте словами и запишите высказывание $\neg N$. Какое из высказываний, N или $\neg N$, истинно?

299. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны имеют длины: $|AB| = 8$, $|BC| = 5$, $|CD| = 20$, $|AD| = 19$. Обозначим через M высказывание $\hat{D} = 90^\circ$. Какое из высказываний M , $\neg M$ истинно?

300. Рассмотрим высказывания:

P : $(\exists \triangle ABC) (\hat{A} = \hat{B})$;

F : $(\exists \triangle ABC) (\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ)$.

Составьте высказывания $\neg P$, $\neg F$. Какие из высказываний P , F , $\neg P$, $\neg F$ истинны?

301. Точка O — центр квадрата $ABCD$. Обозначим через K высказывание: $\widehat{BOA} = 90^\circ$. Сформулируйте словами и запишите высказывание $\neg K$. Какое из высказываний K , $\neg K$ истинно?

302. Рассмотрим высказывания:

P : $(\forall \triangle ABC) (\hat{A} = 90^\circ)$;

Q : $(\forall \triangle ABC) (|AB| + |BC| > |AC|)$;

R : ($\forall t. AB, P$; пр. l , где A и B симметричны относительно l , $P \in l$) ($|AP| = |BP|$).

Составьте высказывания $\neg P$, $\neg Q$, $\neg R$. Какие из высказываний P , Q , R , $\neg P$, $\neg Q$, $\neg R$ истинны?

41. КОНТРПРИМЕР

Пусть $B(x)$ — некоторый предикат, заданный на множестве M . Поставим вопрос: истинно ли высказывание $(\forall x) B(x)$? Если множество M конечно, можно попытаться перебрать все его элементы и убедиться, что для любого элемента $c \in M$ высказывание $B(c)$ истинно. Если же множество M бесконечно (или конечно, но содержит очень много элементов), то такой перебор неосуществим, и потому в справедливости высказывания $(\forall x) B(x)$ можно убедиться только общим рассуждением.

Если все попытки доказать справедливость высказывания $(\forall x) B(x)$ не привели к успеху, возникает предположение, что, быть может, это высказывание неверно, т. е. истинным является его отрицание $\neg(\forall x) B(x)$.

Как можно убедиться в правильности этого предположения? Для этого заметим, что высказывание $\neg(\forall x) B(x)$ означает то же самое, что и $(\exists x) \neg B(x)$. Чтобы убедиться в справедливости этого высказывания, достаточно указать один элемент $c \in M$, для которого предикат $\neg B(x)$ превращается в истинное высказывание, т. е. указать один элемент $c \in M$, для которого высказывание $B(c)$ ложно.

Элемент $c \in M$, для которого высказывание $B(c)$ ложно, называется по отношению к высказыванию $(\forall x) B(x)$ (содержащему знак $\forall$) *контрпримером*. Таким образом, чтобы убедиться в ложности некоторого общего высказывания, достаточно привести один контрпример.

Вот интересный исторический случай нахождения контрпримера. Крупный математик XVII столетия Пьер Ферма высказал предположение, что для любого натурального n число $2^{2^n} + 1$ простое:

$$(\forall n) (2^{2^n} + 1 \text{ — простое число}). \quad (1)$$

При $n = 1, 2, 3$ и 4 получаются следующие высказывания:

$$2^{2^1} + 1 = 5 \text{ — простое число;}$$

$$2^{2^2} + 1 = 17 \text{ — простое число;}$$

$$2^{2^3} + 1 = 257 \text{ — простое число;}$$

$$2^{2^4} + 1 = 65\,537 \text{ — простое число.}$$

Все эти высказывания истинны. При подстановке дальнейших чисел ($n = 5$, $n = 6$ и т. д.) число $2^{2^n} + 1$ оказывается настолько большим, что становится затруднительным проверить, является ли оно простым. Ферма не сумел найти общего доказательства утверждения (1), но был уверен в справедливости этого утверждения. Однако величайший математик XVIII в. Леонард Эйлер оригинальным рассуждением показал, что число $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1$ не является простым (оно делится на 641). Тем самым был найден один контрпример к общему утверждению Ферма, а значит, было доказано, что оно ложно.

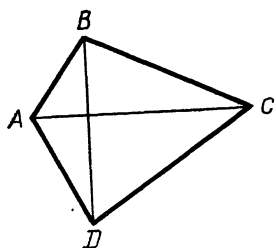


Рис. 200

В качестве геометрического примера рассмотрим следующее утверждение: «если диагонали четырехугольника перпендикулярны, то он является ромбом». Это высказывание можно записать в виде:

$$(\forall F) A(F) \Rightarrow B(F), \quad (2)$$

где $A(F)$ и $B(F)$ — следующие предикаты:

$A(F)$: диагонали четырехугольника F перпендикулярны;

$B(F)$: четырехугольник F — ромб.

Чтобы убедиться в ложности высказывания (2), достаточно, как и всегда, привести один контрпример, т. е. указать четырехугольник F , для которого $A(F)$ истинно (диагонали перпендикулярны), а $B(F)$ ложно (F не является ромбом). Такой контрпример приведен на рисунке 200. Этот контрпример показывает, что из $A(F)$ не всегда следует $B(F)$, т. е. теорема «если диагонали четырехугольника перпендикулярны, то он является ромбом» неверна.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Укажите контрпримеры, доказывающие ложность следующих высказываний: 1) в любом классе учится ровно 40 школьников; 2) в каждом здании имеется лифт; 3) в каждом месяце четыре воскресенья; 4) любые две прямые имеют общую точку; 5) любой четырехугольник, имеющий ось симметрии, является ромбом; 6) любой четырехугольник имеет центр симметрии.

- б) Приведите контрпримеры, подтверждающие ложность следующих высказываний:

1) $(\forall \angle A, \angle B) (\angle A \cong \angle B) \Rightarrow (\angle A \text{ и } \angle B \text{ вертикальные})$;

2) $(\forall \text{ т. } A, B, P, \text{ пр. } l, \text{ где } P \in l) (|AP| = |BP|) \Rightarrow (A \text{ и } B \text{ симметричны относительно } l)$;

3) $(\forall Q, a, b, \text{ где } Q \text{ — четырехугольник, } a \text{ и } b \text{ — длины его диагоналей}) (a = b) \Rightarrow (Q \text{ — прямоугольник})$.

- в) Рассмотрим следующие предикаты, заданные на множестве всех четырехугольников:

$M(F)$: четырехугольник F — параллелограмм;

$N(F)$: в четырехугольнике F имеются две конгруэнтные стороны.

Прочитайте следующие высказывания; установите, какие из них истинны:

1) $(\forall F) M(F) \Rightarrow N(F)$;

2) $\neg (\forall F) M(F) \Rightarrow N(F)$;

3) $(\forall F) N(F) \Rightarrow M(F)$;

4) $\neg (\forall F) N(F) \Rightarrow M(F)$;

5) $(\exists F) (M(F) \text{ и } \neg N(F))$;

6) $(\exists F) (N(F) \text{ и } \neg M(F))$.

303. Рассмотрим следующие предикаты, заданные на множестве всех четырехугольников:

$P(F)$: F — параллелограмм;

$Q(F)$: F — квадрат.

Запишите, используя эти предикаты и знаки $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ и $\neg$, следующие высказывания:

- а) любой квадрат является параллелограммом;
- б) не любой квадрат является параллелограммом;
- в) существует квадрат, который не является параллелограммом;
- г) любой параллелограмм является квадратом;
- д) не любой параллелограмм является квадратом;
- е) существует параллелограмм, который не является квадратом.

Какие из высказываний а) — е) истинны?

304. Рассмотрим высказывание: любой четырехугольник F , диагонали которого перпендикулярны, имеет ось симметрии. Укажите предикаты $A(F)$ и $B(F)$, позволяющие записать это высказывание в виде: $(\forall F) A(F) \Rightarrow B(F)$. Запишите в двух формах отрицание этого высказывания. Какие из рассмотренных высказываний истинны?

305. Рассмотрим предикаты $A(F)$ и $B(F)$, заданные на множестве всех четырехугольников:

$A(F)$: четырехугольник F является параллелограммом;

$B(F)$: четырехугольник F не является трапецией.

Какие из следующих высказываний истинны:

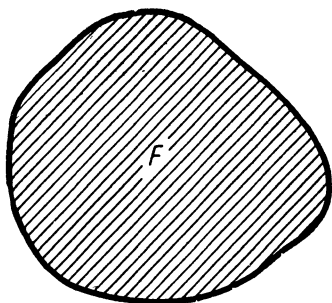
- а) любой четырехугольник, для которого предикат $\neg A(F)$ превращается в истинное высказывание, превращает и предикат $B(F)$ в истинное высказывание;
- б) существует четырехугольник, превращающий предикаты $\neg A(F)$ и $B(F)$ в истинные высказывания;
- в) существует четырехугольник, превращающий предикаты $\neg A(F)$ и $\neg B(F)$ в истинные высказывания;
- г) существует четырехугольник, превращающий предикаты $A(F)$ и $B(F)$ в истинные высказывания?

306. Рассмотрим высказывание: любой четырехугольник F , в котором точка пересечения диагоналей делит одну из диагоналей на конгруэнтные отрезки, имеет центр симметрии. Укажите предикаты $A(F)$ и $B(F)$, позволяющие записать это высказывание в виде:

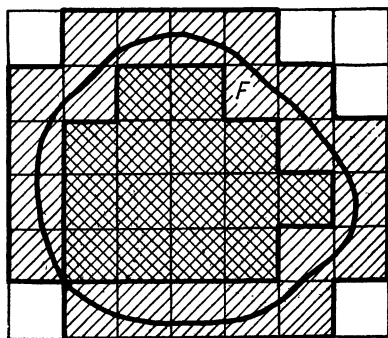
$$(\forall F) A(F) \Rightarrow B(F).$$

Запишите в двух формах отрицание этого высказывания. Какие из рассмотренных высказываний истинны?

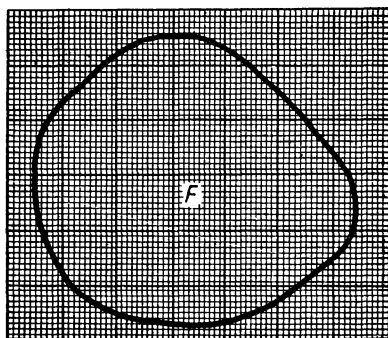
42. ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДИ ФИГУРЫ



a)



b)



b)

Рис. 201

В младших классах вы научились вычислять площадь прямоугольника. При решении различных практических задач приходится вычислять площади фигур произвольной формы.

Для того чтобы приближенно найти площадь $S(F)$ некоторой фигуры F (рис. 201, а), используют *палетку*, т. е. сетку квадратов со стороной длины 1, нанесенную на прозрачный материал. Палетку накладывают на фигуру для подсчета числа единичных квадратов. В данном случае (рис. 201, б) фигура, составленная из 15 единичных квадратов, полностью помещается внутри фигуры F , а фигура, составленная из 36 квадратов, содержит фигуру F . Поэтому

$$15 < S(F) < 36.$$

Как видим, такая палетка позволяет вычислить площадь фигуры лишь с невысокой точностью. Для более точного нахождения площади надо использовать более мелкую палетку, например палетку, каждый квадрат которой имеет сторону длиной $1/10$. На рисунке 201, в на фигуру F наложена такая палетка. Площадь каждого квадрата этой палетки равна $1/100$. Можно подсчитать, что внутри фигуры F содержится фигура, составленная из 2133 таких квадратов, а фигура, составленная из 2335 таких квадратов, содержит F . Поэтому

$$21,33 < S(F) < 23,35.$$

Перечислим основные свойства площади.

1. Площадь любой фигуры есть неотрицательное число.

2. Конгруэнтные фигуры имеют одинаковую площадь.

3. Если фигура F разбита некоторой линией на две части H и K (рис. 202), то

$$S(F) = S(H) + S(K).$$

4. Если Q — квадрат, сторона которого имеет длину 1, то $S(Q) = 1$.

Справедливость этих свойств можно вывести из того способа измерения площадей, о котором речь шла выше (палетка). Однако в школьном курсе эти доказательства не рассматриваются.

Из перечисленных основных свойств площади можно вывести и другие свойства. Например, если фигура H содержится в фигуре F , то $S(H) \leq S(F)$. В самом деле, если фигура H не совпадает с F , то граница фигуры H разбивает фигуру F на две части, одной из которых является сама фигура H , а другой — оставшаяся часть фигуры F ; эту оставшуюся часть обозначим через K (рис. 202). На основании свойства 3

$$S(F) = S(H) + S(K),$$

а на основании свойства 1 имеем $S(K) \geq 0$; поэтому $S(F) \geq S(H)$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- На фигуру F наложили палетку и подсчитали, что внутри фигуры F помещается фигура, составленная из 18 единичных квадратов; фигура F укладывается внутри фигуры, состоящей из 23 единичных квадратов. Может ли площадь фигуры F , обладающей указанными выше свойствами, выражаться числом 17,2? 19,4? 23,7?
- Каждый из единичных квадратов, о которых говорилось в задании а), разбили на 100 конгруэнтных частей. При

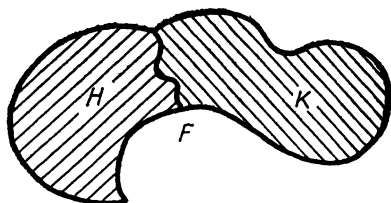


Рис. 202

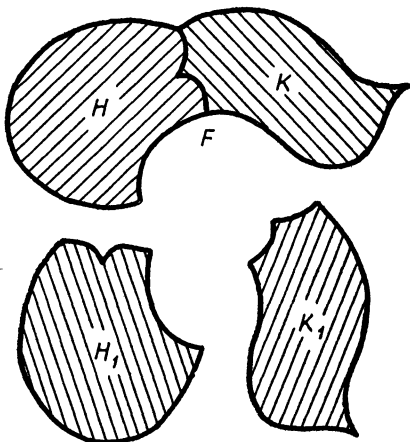


Рис. 203

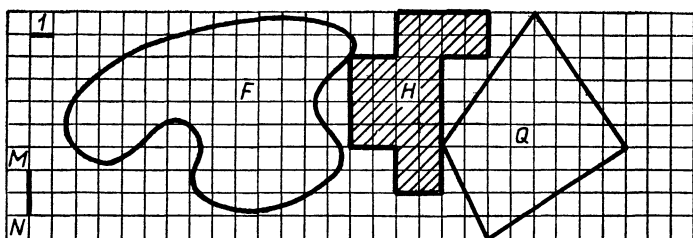


Рис. 204

- этом внутри фигуры F оказалось 1945 малых квадратов; фигура F оказалась заключенной в фигуре, состоящей из 2111 малых квадратов. Охарактеризуйте площадь фигуры F .
- в) На рисунке 203 $H \cong H_1$, $K \cong K_1$, $S(H_1) = 5$, $S(K_1) = 3$. Докажите, используя свойства площади, что $S(F) = 8$.
- г) Определите площадь фигуры H на рисунке 204. Какова будет площадь той же фигуры, если за единицу измерения принять отрезок MN ?
- д) Обозначим через $A(F)$ предикат: площадь фигуры F меньше 5. При каких значениях переменной F (из числа фигур, изображенных на рис. 205) предикат $A(F)$ обращается в истинное высказывание?

ЗАДАЧИ

307. Оцените площади фигур F и Q , изображенных на рисунке 204, с помощью двойных неравенств.
308. Вычислите площадь фигуры F , изображенной на рисунке 206:
а) подсчитывая число содержащихся в ней единичных квадратов; б) разбивая фигуру F на два прямоугольника.
309. Вычислите площадь квадрата, двумя противоположными вершинами которого являются точки $A(-7; -2)$, $C(-2; 3)$.

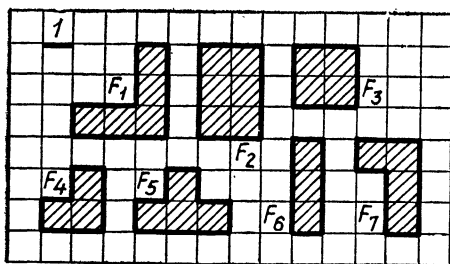


Рис. 205

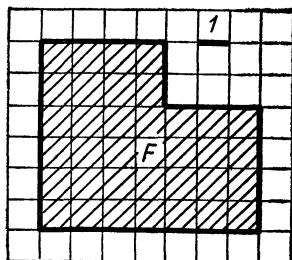


Рис. 206

310. Начертите круг радиуса 1,5 см на миллиметровой бумаге и оцените площадь этого круга с помощью двойных неравенств, подсчитывая:

- а) квадраты со стороной 1 см;
- б) квадраты со стороной 0,5 см;
- в) квадраты со стороной 0,1 см.

Вычислите площадь этого же круга по формуле $S = \pi r^2$, приняв $\pi = 3\frac{1}{7}$.

43. ДЕЙСТВИЯ С ПЛОЩАДЯМИ ФИГУР

Над площадями можно выполнять арифметические действия. Например, на рисунке 207 прямоугольник P разбивается отрезком на два прямоугольника H и Q , и это позволяет вычислить его площадь: $S(P) = S(H) + S(Q) = 83,2 + 41,2 = 124,4$. Разумеется, при проведении этого вычисления предполагалось, что площади фигур H и Q измерены с помощью *одной и той же* единицы измерения площадей (и тогда площадь фигуры P называется измеренной в тех же единицах).

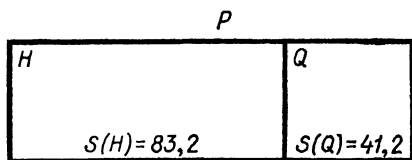
Нередко единицу указывают в скобках в конце вычислений. Например, запись

$$S(F) = 5 \text{ (кв. см)} \quad (1)$$

можно подробно прочитать так: «площадь фигуры F равна 5, причем за единицу измерения площади принят квадратный сантиметр».

В геометрии и физике применяется и другой способ указания единицы измерения площади. Именно, вместо кв. см для обозначения квадратного сантиметра употребляют запись см^2 . (Такой же смысл имеют записи м^2 , км^2 и т. д.) Это наименование площади пишут не в скобках в конце записи, а в виде множителя после каждого числа, выражающего площадь. Например, запись (1) примет вид: $S(F) = 5 \text{ см}^2$. При этом сомножитель см^2 рассматривается как квадрат символа см, выражающего единицу длины. Такое соглашение позволяет применять законы арифметических действий к «произведению» числа и наименования площади.

Пусть, например, поставлена задача найти площадь прямоугольника, стороны которого имеют длины $a = 1,5$ дм и $b = 7$ см. Пользуясь формулой площади прямоугольника



$$S = ab, \quad (2)$$

Рис. 207

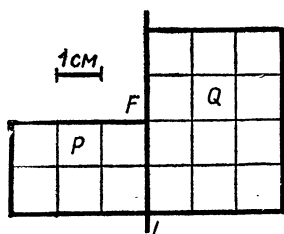


Рис. 208

известной из начальной школы, можно провести вычисление так:

$$\begin{aligned} S &= (1,5 \text{ дм}) \cdot (7 \text{ см}) = 1,5 \cdot 7 \cdot \text{дм} \cdot \text{см} = \\ &= 10,5 \cdot (10 \text{ см}) \cdot \text{см} = (10,5 \cdot 10) \text{ см} \cdot \text{см} = \\ &= 105 \text{ см}^2. \end{aligned}$$

В качестве еще одного примера найдем площадь фигуры F , показанной на рисунке 208. Прямая l разбивает фигуру F на два прямоугольника P и Q , и потому

$$\begin{aligned} S(F) &= S(P) + S(Q) = 3 \text{ см} \cdot 2 \text{ см} + 3 \text{ см} \cdot 4 \text{ см} = \\ &= 6 \text{ см}^2 + 12 \text{ см}^2 = (6 + 12) \text{ см}^2 = 18 \text{ см}^2. \end{aligned}$$

Наконец, заметим, что эти же соглашения удобны при замене единицы измерения площади. Пусть, например, известно, что фигура F имеет площадь 3 квадратных дюйма, и требуется узнать ее площадь в квадратных сантиметрах. Зная, что отрезок в 1 дюйм имеет длину примерно 2,54 см, находим:

$$S(F) = 3 \text{ дюйм}^2 \approx 3 \cdot (2,54 \text{ см})^2 = 3 \cdot 2,54 \cdot 2,54 \text{ см} \cdot \text{см} \approx 19,4 \text{ см}^2.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ.

- Какие из следующих высказываний истинны: 1) площадь одной и той же фигуры может выражаться различными числами; 2) площади неконгруэнтных фигур могут выражаться одним и тем же числом; 3) площади любых двух конгруэнтных фигур, измеренных с помощью одной и той же единицы, выражаются одним и тем же числом?
- Докажите, используя действия с наименованиями, что $1 \text{ га} = 10\,000 \text{ м}^2$.
- Площадь кухни 9 м^2 . Сколько плиток из линолеума, имеющих форму квадрата со стороной 3 дм, нужно для покрытия пола в кухне?
- Можно ли утверждать, что если площади фигур F и H измерены с помощью одной и той же единицы измерения площади, то отношение $\frac{S(F)}{S(H)}$ не зависит от выбора этой единицы?

ЗАДАЧИ

- Найдите значение площади фигуры P в кв. дм, если $S(P) = 23,87 \text{ см}^2$.
- Вычислите площадь прямоугольника со сторонами a и b , если:
 - $a = 3,008 \text{ м}$, $b = 2,4 \text{ см}$;
 - $a = 11,1 \text{ дм}$, $b = 0,4 \text{ м}$;

в) $a = 7,34$ см, $b = 0,734$ дм;

г) $a = 11\frac{3}{4}$ см, $b = 11,75$ см.

313. Вычислите длину отрезка x по данным, указанным на рисунке 209, если известно, что площадь фигуры F равна 96.

314. Площадь квадрата F равна 256 см^2 . Чему равна длина стороны квадрата, имеющего площадь, в 4 раза меньшую площади квадрата F ? Во сколько раз сторона этого квадрата меньше стороны квадрата F ?

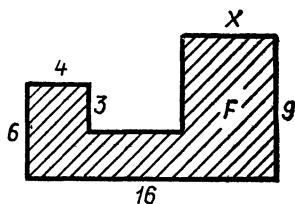


Рис. 209

315. Площадь квадрата равна $80,3 a$. Чему равна его площадь в квадратных метрах?
316. Вычислите длину стороны b прямоугольника F по заданным $S(F)$ и a :

$S(F)$	$9,45 \text{ см}^2$	125 см^2	$38\frac{1}{4} \text{ см}^2$
a	$2,1 \text{ дм}$	15 дм	$4\frac{1}{4} \text{ см}$

44. ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Формула $S = ab$ дает возможность найти площадь прямоугольника не измерением, а вычислением. В самом деле, нам нужно найти длины двух отрезков (сторон прямоугольника), после чего площадь прямоугольника находится арифметическим подсчетом.

В этом и двух следующих параграфах выводятся формулы, позволяющие вычислить площади параллелограмма, треугольника и трапеции, зная длины некоторых отрезков.

Пусть $ABCD$ — некоторый параллелограмм. Условимся отрезки AD и BC считать *основаниями* этого параллелограмма. В таком случае расстояние между прямыми AD и BC называется *высотой* этого параллелограмма. Высота параллелограмма $ABCD$ на рисунке 210 равна длине перпендикуляра BH , проведенного из точки B к основанию AD . Этот отрезок также называют высотой параллелограмма.

Если за основания параллелограмма принять не отрезки AD и BC , а другую пару параллельных его сторон (рис. 211), то высотой параллелограмма будет расстояние между прямыми AB и CD , т. е. длина отрезка BN .

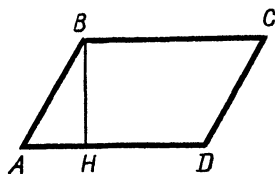


Рис. 210

Теорема. Площадь параллелограмма может быть вычислена по формуле

$$S = ah,$$

где a — длина стороны, принятой за основание, а h — соответствующая высота.

Доказательство. Пусть A — вершина острого угла параллелограмма F , AD — сторона, принятая за основание, CH — высота (рис. 212). Тогда $|AD| = a$, $|CH| = h$.

Произведем параллельный перенос в направлении AD на отрезок длины a . При этом переносе точка B перейдет в точку C , а точка C перейдет в точку M , лежащую на прямой BC на расстоянии a от точки C . Далее, точка A перейдет в точку D , а точка H — в точку N , лежащую на прямой AD на расстоянии a от точки H (рис. 213).

Четырехугольник P с вершинами C, M, N, H — параллелограмм (так как $(CM) \parallel (HN)$ и $[CM] \cong [HN]$). Этот параллелограмм является прямоугольником (так как $(CH) \perp (AD)$).

Так как точки A, B, C и H переходят при этом переносе в точки D, C, M и N , то трапеции $ABCH$ и $DCMN$ конгруэнтны. Следовательно,

$$S(ABCH) = S(DCMN).$$

Далее,

$$S(ABCH) = S(F) + S(T);$$

$$S(DCMN) = S(P) + S(T),$$

где через T обозначен треугольник DCH .

Следовательно,

$$S(F) + S(T) = S(P) + S(T),$$

и потому

$$S(F) = S(P).$$

Но $S(P)$, т. е. площадь прямоугольника с длинами сторон a и h , равна $a \cdot h$. Таким образом,

$$S(F) = a \cdot h.$$

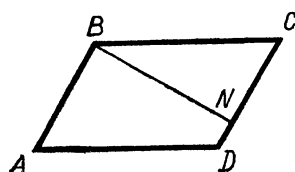


Рис. 211

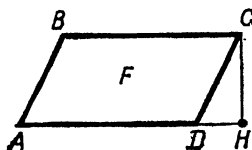


Рис. 212

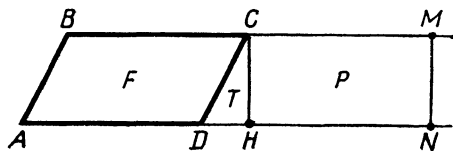


Рис. 213

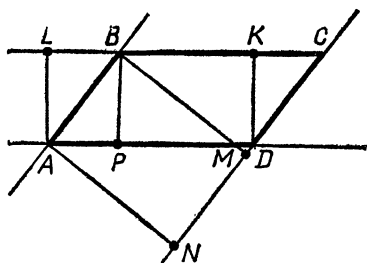


Рис. 214

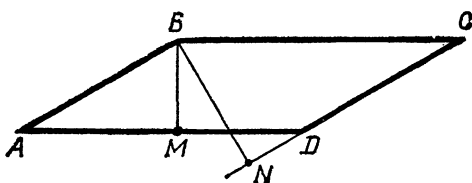


Рис. 215

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Принимая какие-либо из сторон параллелограмма $ABCD$ за основания (рис. 214), назовите соответствующие высоты.
- б) Известно, что $|CD| = 24$ мм, $\hat{B} = 150^\circ$ (рис. 215). Какую из высот параллелограмма $ABCD$ можно определить по этим данным?
- в) Высоты параллелограмма равны 2 см и 3 см. Длина одной из сторон параллелограмма равна 2,5 см. Чему равна площадь этого параллелограмма?
- г) Существует ли параллелограмм, у которого стороны имеют длины 3 см и 6 см, а высоты 4 см и 1 см?
- д) Обозначим через $S(M)$ предикат: площадь параллелограмма M равна 16. Для каких из параллелограммов, изображенных на рисунке 216, этот предикат превращается в истинное высказывание?
- е) Прямые a и b на рисунке 217 параллельны. Докажите, что параллелограммы $ABCD$, $ABMN$, $ABPQ$ имеют одинаковую площадь.

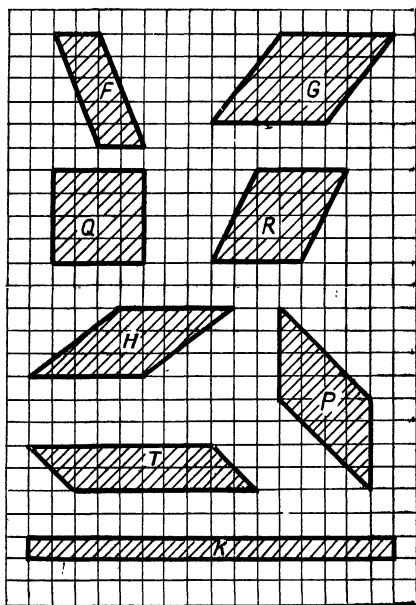


Рис. 216

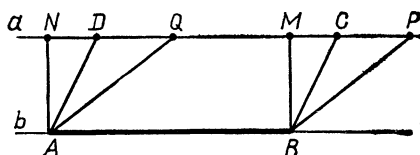


Рис. 217

ЗАДАЧИ

- 817.** Диагональ параллелограмма перпендикулярна одной из его сторон и имеет длину 4,1 см; величина одного из углов параллелограмма равна 45° . Вычислите площадь параллелограмма.
- 818.** Длины сторон параллелограмма $ABCD$ равны 6 см и 8 см, а высота, проведенная к меньшей стороне, имеет длину 4 см. Найдите длину высоты, проведенной к большей стороне.
- 819.** Постройте параллелограмм площадью 12 см^2 , у которого одна сторона имеет длину 4 см, а один из углов имеет величину 70° .
- 820.** Докажите, что из всех параллелограммов, длины сторон которых равны a и b , наибольшую площадь имеет прямоугольник.
-
- 821.** Обозначим через a длину одной стороны параллелограмма P , а через h_a — длину соответствующей высоты. Вычислите $S(P)$, если: а) $a = 0,00314 \text{ км}$ и $h_a = 263 \text{ дм}$; б) $a = 123 \text{ м}$ и $h_a = 0,101 \text{ км}$; в) выразите h_a через a и S . Вычислите h_a , если $a = 6$, а $S(F) = 27$.
- 822.** Длины сторон параллелограмма равны 8,2 и 3,6; один из углов параллелограмма имеет величину 30° . Вычислите площадь параллелограмма.
- 823.** Начертите прямоугольник. Постройте какой-либо ромб, площадь которого равна площади этого прямоугольника.

45. ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Пусть ABC — некоторый треугольник. Условимся отрезок BC считать *основанием* треугольника. Тогда расстояние от противоположной вершины A до прямой BC называют *высотой* треугольника, соответствующей основанию BC .

Высота треугольника ABC на рисунке 218 равна длине перпендикуляра AH , проведенного из точки A к прямой BC , на которой расположено основание. Этот отрезок также называют высотой треугольника.

Так как любая сторона треугольника может быть принята за основание, то в треугольнике имеются три высоты.

Теорема. *Площадь треугольника может быть вычислена по формуле*

$$S = \frac{ah}{2},$$

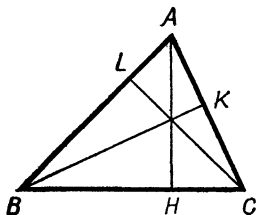


Рис. 218

где a —длина основания треугольника, h —соответствующая высота.

Доказательство. Пусть $[BC]$ —основание треугольника, A —противоположная вершина, $[AH]$ —высота (рис. 219). Произведем симметрию относительно середины M стороны AC . При этой симметрии $\triangle ABC$ перейдет в конгруэнтный ему $\triangle ADC$, так что

$$S(ABC) = S(ADC).$$

Поэтому

$$S(ABCD) = S(ABC) + S(ADC) = 2 \cdot S(ABC).$$

Так как $(AB) \parallel (CD)$ и $(BC) \parallel (DA)$, то четырехугольник $ABCD$ —параллелограмм. Следовательно,

$$S(ABC) = \frac{1}{2} \cdot S(ABCD) = \frac{1}{2} ah.$$

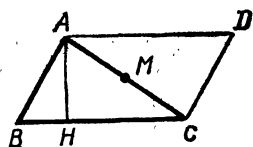


Рис. 219

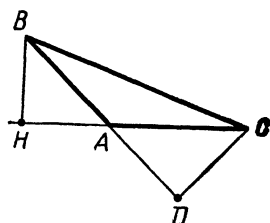


Рис. 220

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) По рисунку 220 назовите отрезок, длина которого является:
 - 1) высотой треугольника ABC , проведенной из вершины B к основанию AC ;
 - 2) расстоянием от точки B до отрезка AC ;
 - 3) высотой треугольника ABC , проведенной из вершины C к основанию AB ;
 - 4) расстоянием от точки C до отрезка AB .
- б) Какие из следующих высказываний истинны: 1) в любом треугольнике ABC расстояние от вершины A до основания

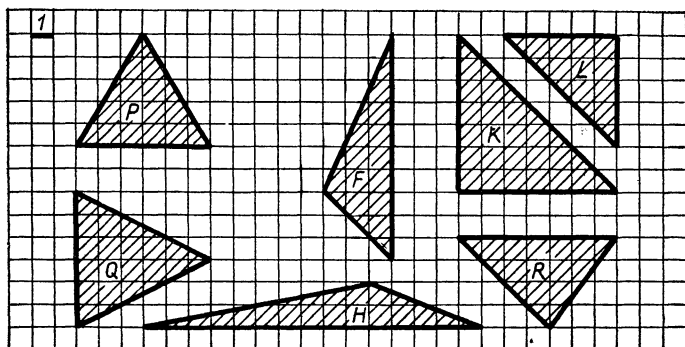


Рис. 221

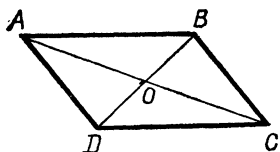


Рис. 222

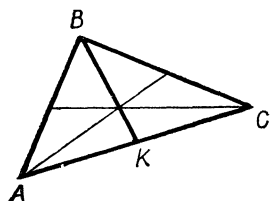


Рис. 223

BC является высотой этого треугольника; 2) в любом треугольнике ABC расстояние от вершины A до прямой BC является высотой треугольника; 3) в любом прямоугольном треугольнике ABC расстояние от вершины A до стороны BC является высотой этого треугольника?

- в) Пусть $S(X)$ — предикат: площадь треугольника X равна 15. Для каких из треугольников, изображенных на рисунке 221, этот предикат превращается в истинное высказывание?
- г) На рисунке 222 изображен параллелограмм $ABCD$. Назовите несколько пар треугольников, имеющих: 1) одинаковые высоты; 2) одинаковые площади.

- д) Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны (рис. 223). Докажите, что медиана треугольника разбивает его на два треугольника одинаковой площади.

ЗАДАЧИ

324. Обозначим через a , b и c длины сторон треугольника, а через h_a , h_b и h_c — длины соответственных высот. Вычислите площадь S треугольника, если:
- $a = 0,0045$ км и $h_a = 32$ см;
 - $c = 2,8$ м и $h_c = 7,1 \cdot 10^3$ мм.
325. При тех же обозначениях, что и в задаче 324, выразите каждую из величин S , b , h_b через две другие. Вычислите b , если $S = 67,52$ км² и $h_b = 6,4$ км. Вычислите h_b , если $S = 1\frac{5}{9}$ см² и $b = 1\frac{1}{3}$ см.
326. Величина угла A треугольника ABC равна 45° . Высота треугольника, проведенная из вершины B , делит сторону AC на две части: AD и DC . Вычислите площадь треугольника, если $|AD| = 3$, а $|DC| = 2$.
327. Вычислите длину высоты h_c треугольника, если $b = 12$, $h_b = 3$, $c = 9$.
328. В треугольнике ABC проведена средняя линия MP , параллельная стороне AC . Найдите отношение периметров треугольников ABC и BMP . Найдите отношение площадей этих треугольников.
329. Начертите произвольную трапецию $ABCD$ и ее диагонали AC и BD . Найдите на чертеже две пары треугольников, имеющих равные площади.

330. Стороны треугольника имеют длины $1\frac{2}{5}$ см и $3\frac{1}{2}$ см, а величина угла, образованного этими сторонами, равна 150° . Вычислите площадь этого треугольника.
331. Площадь прямоугольного треугольника равна $43,56$ см², а длина одного из его катетов равна $3,6$ см. Чему равна длина другого катета?
332. Точка P служит серединой медианы BD треугольника ABC . Соедините точку P с вершинами A и C треугольника и докажете, что при этом образовалось четыре треугольника равной площади.
333. Произвольная точка P диагонали AC параллелограмма $ABCD$ соединена с вершинами B и D . Докажите, что треугольники ABP и ADP имеют равную площадь.

46. ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ ТРАПЕЦИИ

Расстояние между прямыми, на которых расположены основания трапеции, называется *высотой* этой трапеции. Высота трапеции $ABCD$ на рисунке 224 равна длине перпендикуляра BH , проведенного из точки B к основанию AD . Этот отрезок также называют высотой трапеции.

Теорема. *Площадь трапеции может быть вычислена по формуле*

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

где a и b — длины оснований трапеции, h — ее высота.

Доказательство. Пусть $[AD]$ и $[BC]$ — основания трапеции, а $[BH]$ — ее высота (рис. 225).

Произведем симметрию относительно середины M стороны CD . При этой симметрии трапеция $ABCD$ перейдет в конгруэнтную ей трапецию $KLDC$. Четырехугольник $ABKL$ — параллелограмм, основание которого имеет длину $a+b$. При этом

$$S(ABKL) = 2 \cdot S(ABCD).$$

Следовательно,

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot S(ABKL) = \frac{1}{2} (a+b) h.$$

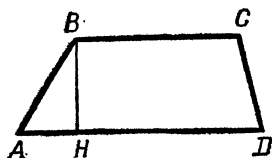


Рис. 224

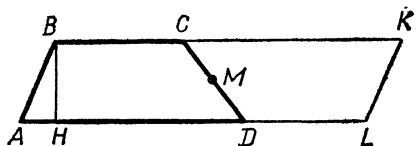


Рис. 225

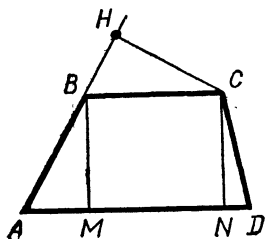


Рис. 226

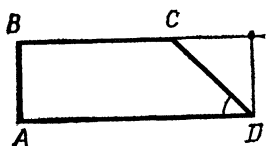


Рис. 227

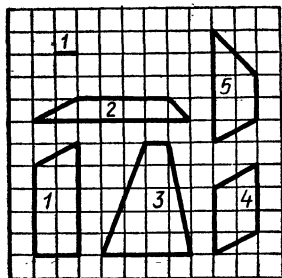


Рис. 228

- а) Назовите по рисунку 226 отрезки, являющиеся высотами трапеции.
- б) В трапеции $ABCD$ (рис. 227) боковая сторона AB перпендикулярна основанию, боковая сторона CD образует с основанием AD угол, величина которого равна 45° . Определите площадь трапеции, если $|AD| = 12$ см, $|BC| = 8$ см.
- в) Вычислите площади трапеций, заданных на рисунке 228.

ЗАДАЧИ

334. Обозначим через p и q длины верхнего и нижнего оснований трапеции $ABCD$, через h — ее высоту.
 - а) Вычислите q , если $h = 25$ м, $p = 98$ м и $S(ABCD) = 20$ а.
 - б) Вычислите $S(ABCD)$, если $p = 3,814$ дм, $q = 6,186$ дм и $h = 12,01$ дм.
335. Длина отрезка, соединяющего середины непараллельных сторон трапеции, равна $8,05$ дм, а расстояние между параллельными сторонами равно $2,2$ дм. Вычислите площадь трапеции.
336. Определите длины оснований трапеции, если ее площадь равна 160 см², $h = 20$ см, а верхнее основание больше нижнего на 8 см.
337. В трапеции $ABCD$ длины оснований BC и AD равны 4 см и 8 см, величина угла A равна 30° , диагональ AC служит биссектрисой этого угла. Вычислите площадь трапеции.
338. Периметр трапеции равен $23,2$ см, длины боковых сторон равны $6,1$ см и $5,8$ см. Вычислите площадь этой трапеции, если ее высота равна $5,2$ см.
339. Основания трапеции имеют длины 20 см и 45 см. Одна из боковых сторон трапеции имеет длину 12 см и образует с основанием угол, величина которого равна 150° . Вычислите площадь этой трапеции.
340. Точка M делит верхнее основание трапеции на части длиной $9,1$ и $5,9$. Нижнее основание трапеции имеет длину 26 . Найдите на нижнем основании такую точку N , чтобы прямая MN делила площадь трапеции пополам.

47. ПЛОЩАДЬ ПРОИЗВОЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

Формулы, полученные в пунктах 44, 45, 46, позволяют вычислить площадь любого многоугольника. Например, заданный многоугольник можно разрезать на несколько параллелограммов, треугольников, трапеций (рис. 229) и, вычислив площадь каждой из этих фигур, сложить результаты.

Так как многоугольник можно разбить на треугольники, параллелограммы и трапеции по-разному, то надо стремиться найти такое разбиение, которое делает вычисление площади наиболее удобным.

Иногда для вычисления площади многоугольника M его разрезают на части, которые затем перекладывают таким образом, чтобы получился более простой многоугольник M_1 . Например, пятиугольник M , изображенный на рисунке 230, удобно для вычисления его площади разрезать на части T_1 , T_2 , Q , площади которых легко вычислить. Однако если треугольники T_1 и T_2 переместить в новое положение T'_1 и T'_2 , то из тех же частей составляется прямоугольник M_1 (рис. 231), имеющий площадь

$$10 \cdot 5 = 50.$$

Значит, и пятиугольник M имеет площадь 50.

Два многоугольника M и M_1 , которые можно разрезать на соответственные конгруэнтные части, называются *равносоставленными*. *Равносоставленные многоугольники имеют одинаковые площади (или, как еще говорят, равновелики).*

В прошлом веке австрийский математик Гервин и венгерский математик Фаркош Бояй доказали, что справедлива и обратная теорема: *любые два равновеликих многоугольника равноставлены, т. е. их можно разбить на соответственные конгруэнтные части.*

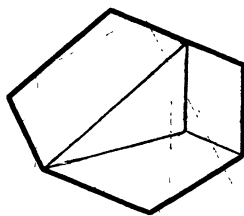


Рис. 229

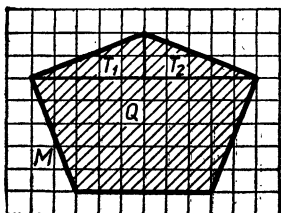


Рис. 230

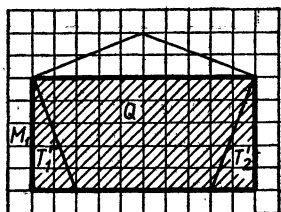


Рис. 231

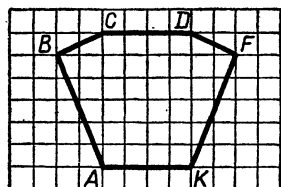


Рис. 232

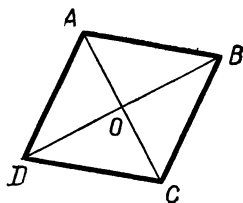


Рис. 233

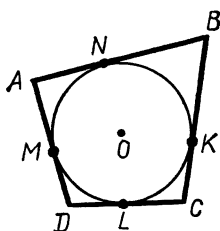


Рис. 234

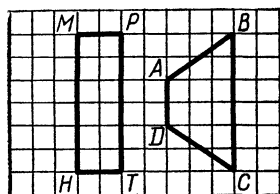


Рис. 235

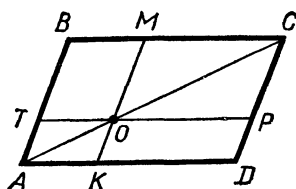


Рис. 236

- а) Вычислите площадь шестиугольника, изображенного на рисунке 232, поразному разбивая его на части.
- б) Диагонали ромба (рис. 233) имеют длины 6 и 8; найдите площадь этого ромба. Чему равна площадь ромба, диагонали которого имеют длины a и b ?
- в) Стороны четырехугольника касаются окружности (рис. 234). Вычислите площадь этого четырехугольника, если длины его сторон равны a, b, c, d , а радиус окружности равен r .
- г) Докажите, что трапеция $ABCD$ и прямоугольник $MPTH$ равновелики (рис. 235).
- д) Какие из следующих высказываний истинны: 1) любые равновеликие фигуры конгруэнтны; 2) любые равносоставленные многоугольники равновелики; 3) любые конгруэнтные фигуры равновелики?

ЗАДАЧИ

341. Вычислите площадь пятиугольника, если известны координаты его вершин: $A(1; 5), B(3; 7), C(5; 5), D(5; 3)$ и $F(3; 2)$.
342. Середины каждой двух смежных сторон квадрата со стороной a соединены отрезками. Вычислите площадь получившегося четырехугольника.
343. Докажите, что если диагонали четырехугольника P перпендикулярны и имеют длины d_1 и d_2 , то

$$S(P) = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

344. На какое число частей надо разрезать:
 - а) произвольный треугольник; б) трапецию; в) параллелограмм, чтобы из этих частей можно было составить некоторый прямоугольник?

345. Через точку O диагонали AC параллелограмма $ABCD$ проведены прямые MK и PT , параллельные сторонам параллелограмма (рис. 236). Докажите, что $S(MBTO) = S(POKD)$.

346. Вычислите площадь шестиугольника $ABCDEF$ с вершинами в точках $A(0; 2)$, $B(3; 5)$, $C(6; 7)$, $D(7; 5)$, $E(6; 2)$ и $F(3; 0)$.

347. В четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, а их длины равны 5,6 см и 3,02 см. Вычислите площадь этого четырехугольника.

348. В треугольнике проведена медиана. Покажите, что два получившихся треугольника равносторонны. Постарайтесь разрезать треугольники на наименьшее число соответственно конгруэнтных частей.

48. КОМПОЗИЦИЯ ДВИЖЕНИЙ

Рассмотрим два движения плоскости, причем одно из них назовем первым, а другое—вторым. Возьмем на плоскости произвольную точку A и обозначим через A_1 точку, в которую переходит A при первом движении (рис. 237). В свою очередь точка A_1 переводится вторым движением в некоторую новую точку A_2 .

Результат последовательного выполнения взятых двух движений представляет собой некоторое отображение плоскости на себя; точку A оно переводит в точку A_2 . Это «резльтирующее» отображение называется *композицией* первого и второго рассмотренных движений.

Рассмотрим какую-либо фигуру F . Первое движение переводит ее в некоторую фигуру F_1 (рис. 237). Второе движение переводит F_1 в некоторую новую фигуру F_2 . Композиция же первого и второго движений сразу переводит фигуру F в F_2 .

Теорема. *Композиция любых двух движений является движением.*

Доказательство. Пусть A и B —две произвольные точки, A_1 и B_1 —точки, в которые они переходят при первом движении, а A_2 и B_2 —точки, в которые переходят A_1 и B_1 при втором движении (рис. 238). Так как первое движение сохраняет расстояния, то $|AB| = |A_1B_1|$. Но второе движение тоже сохраняет расстояния, и потому $|A_1B_1| = |A_2B_2|$. Следовательно, $|AB| = |A_2B_2|$, т. е. результирующее отображение также сохраняет расстояния.

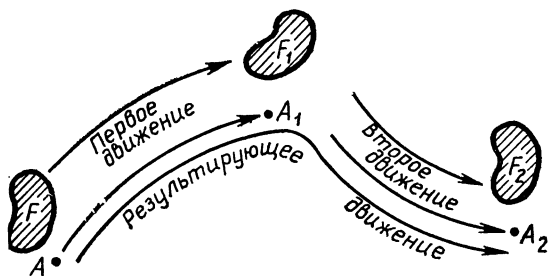


Рис. 237

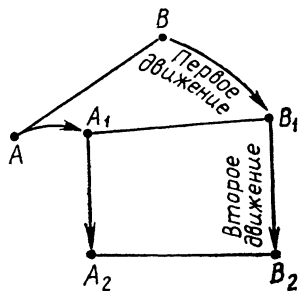


Рис. 238

Итак, композиция двух движений представляет собой отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния, т. е. является движением. Теорема доказана.

Композицию отображений f и g (первым выполняется f , вторым g) принято обозначать записью $g \circ f$. При отображении f точка A переходит в точку $A_1 = f(A)$. В свою очередь точка A_1 переводится отображением g в точку $A_2 = g(A_1) = g(f(A))$. При композиции отображений f и g точка A сразу переходит в A_2 , т. е. $(g \circ f)(A) = g(f(A)) = A_2$.

Пусть, например, движение f представляет собой поворот вокруг точки O на угол 75° , а движение g — поворот вокруг той же точки O на -30° . Поворот f переводит точку A в A_1 (рис. 239); поворот g точку A_1 переводит в A_2 . Композиция $g \circ f$ этих двух поворотов (т. е. последовательное выполнение первого поворота f , а затем второго поворота g) представляет собой поворот на угол 45° .

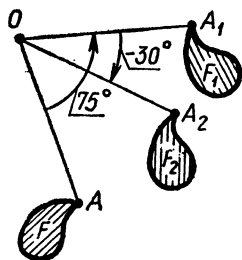


Рис. 239

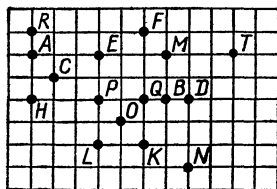


Рис. 240

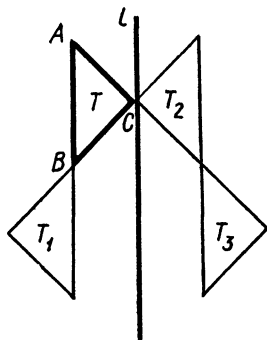


Рис. 241

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Обозначим через f перенос на 3 клетки вправо, через g — поворот на -90° вокруг точки O , а через h — перенос на две клетки вниз. В какую точку переходит точка A (рис. 240) при отображении: 1) $g \circ f$; 2) $g \circ h$; 3) $f \circ h$? Какая точка переходит в B при отображении: 1) $h \circ g$; 2) $h \circ f$?

- б) Треугольники T и T_1 (рис. 241) симметричны относительно точки B . При симметрии s относительно прямой l треугольники T и T_1 переходят соответственно в треугольники T_2 и T_3 . Какие из следующих высказываний истинны: 1) при композиции $s \circ r$, где r — симметрия относительно точки B и s — симметрия относительно l , треугольник T переходит в T_3 ; 2) при композиции $r \circ s$ треугольник T переходит в T_3 ; 3) при композиции $r \circ s$ треугольник T_3 переходит в T ?

ЗАДАЧИ

349. Постройте прямоугольный треугольник F с катетами длиной 3 см и 4 см и обозначьте через O вершину его прямого угла. Постройте треугольник F_1 , в который переходит F при

повороте вокруг точки O на -50° . Постройте треугольник F_2 , в который переходит F_1 при симметрии относительно точки O . Какие из следующих высказываний истинны:

а) композиция поворота вокруг O на -50° и симметрии относительно точки O переводит треугольник F в треугольник F_2 ;

б) композиция поворота вокруг O на -50° и симметрии относительно точки O представляет собой поворот на 130° вокруг точки O ;

в) треугольники F и F_2 конгруэнтны;

г) при повороте на -230° вокруг точки O середина гипотенузы треугольника F переходит в середину гипотенузы треугольника F_2 ;

д) если $A \in F$, $B \in F$ и $A_2 \in F_2$, $B_2 \in F_2$, то обязательно $|AB| = |A_2B_2|$?

350. Начертите перпендикулярные прямые l_1 и l_2 , отметьте произвольную точку M . Постройте точку, в которую переходит M при композиции осевой симметрии относительно l_1 и осевой симметрии относительно l_2 . Прделайте то же, заменяя M другими точками. Что собой представляет композиция этих симметрий?

351. Обозначим через f перенос вправо на 3 единицы, через g — перенос влево на 2 единицы и через h — перенос вниз на 2 единицы. Отметьте на клеточной бумаге точку M и постройте точку, в которую она переходит при отображении $g \circ (f \circ h)$. В виде композиции каких двух переносов можно представить это отображение?

352. Проведите окружность с центром O и разделите ее на 6 конгруэнтных частей; точки деления последовательно обозначьте буквами A, B, C, D, E, F . Найдите точку, в которую переходит A при композиции симметрий относительно прямой OB и прямой OD . Какие из следующих высказываний истинны:

а) рассмотренная композиция совпадает с симметрией относительно прямой OF ; б) при рассмотренной композиции шестиугольник $ABCDEF$ переходит в тот же шестиугольник?

353. Скопируйте рисунок 242.

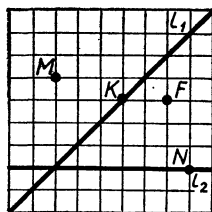


Рис. 242

а) Постройте точки M'', K'', F'' и N'' , в которые переходят точки M, K, F и N при композиции $s_2 \circ s_1$, где s_1 — осевая симметрия относительно l_1 , а s_2 — осевая симметрия относительно l_2 . б) Постройте точки M_2, K_2, F_2 и N_2 , в которые переходят точки M, K, F и N при композиции $s_1 \circ s_2$. в) Совпадают ли отображения $s_2 \circ s_1$ и $s_1 \circ s_2$?

49. СВОЙСТВА КОМПОЗИЦИИ ДВИЖЕНИЙ

Рассмотрим вопрос о том, зависит ли композиция двух движений от порядка, в котором эти движения выполняются. Пусть движение f представляет собой поворот на угол 75° , а движение g — поворот вокруг той же точки на угол -30° (см. рис. 239). Композиция $g \circ f$ этих движений представляет собой поворот на угол

$$75^\circ + (-30^\circ) = 45^\circ.$$

Выполним теперь эти движения в обратном порядке: сначала поворот на -30° , а затем на 75° (рис. 243). В этом случае композицией $f \circ g$ будет поворот вокруг той же точки на угол

$$(-30^\circ) + 75^\circ = 45^\circ.$$

Как мы видим, независимо от того, в каком порядке выполняются два поворота вокруг точки O , результирующий поворот (т. е. их композиция) будет одним и тем же:

($\forall f, g$, где f и g — повороты вокруг одной и той же точки)
($g \circ f = f \circ g$).

По аналогии с числами говорят, что композиция поворотов вокруг одной точки O обладает свойством *коммутативности* (переместительности).

Однако высказывание: «композиция любых двух движений обладает свойством коммутативности» — *ложно*. Приведем контрпример, подтверждающий это.

Рассмотрим следующие два движения: поворот r вокруг точки O на -90° и параллельный перенос t вправо на две клетки (рис. 244). При повороте r точка A переходит в A' , а параллельный перенос t переводит точку A' в A'' . Выполним теперь те же движения в обратном порядке: вначале перенос t , а потом поворот r . При переносе t точка A перейдет в A_1 , а поворот r переведет точку A_1 в A_2 . Таким образом, в этом случае композиция движений переводит точку A в точку A_2 , отличную от A'' , т. е. при изменении порядка выполнения движений результирующие движения получаются различными:

$$t \circ r \neq r \circ t.$$

Рассмотрим теперь вопрос об ассоциативности (сочетательности) операции композиции движений.

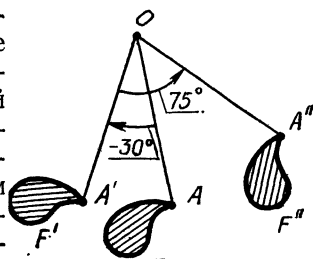


Рис. 243

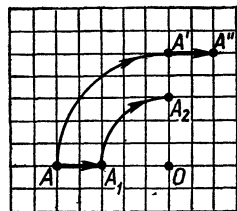


Рис. 244

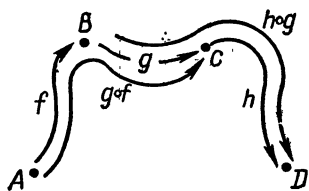


Рис. 245

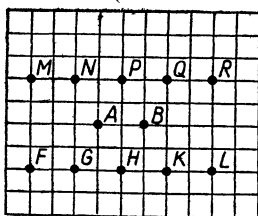


Рис. 246

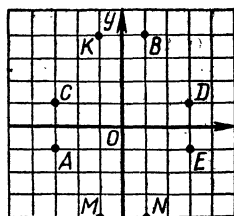


Рис. 247

Теорема. Для любых движений f , g , h справедливо соотношение

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Доказательство. Возьмем некоторую точку A и обозначим через B точку, в которую она переходит при движении f , т. е. $B = f(A)$. Далее, через C обозначим точку, в которую переходит точка B при движении g , т. е. $C = g(B)$. Наконец, через D обозначим точку, в которую переходит C при движении h , т. е. $D = h(C)$ (рис. 245). При движении $g \circ f$ точка A сразу переходит в C , а потому при движении $h \circ (g \circ f)$ точка A сразу переходит в D .

С другой стороны, при движении f точка A переходит в B , а при движении $h \circ g$ точка B сразу переходит в D . Поэтому при движении $(h \circ g) \circ f$ точка A переходит в D .

Итак, при обоих движениях $h \circ (g \circ f)$ и $(h \circ g) \circ f$ точка A переходит в одну и ту же точку D . Так как в этом рассуждении точка A была произвольной, то эти движения совпадают.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Обозначим через f симметрию относительно точки A , а через g — симметрию относительно точки B (рис. 246). В какую точку переходит точка P при движении $g \circ f$? При движении $f \circ g$?
- Отображения f , g , h являются движениями. Можно ли утверждать, что $h \circ (g \circ f)$ тоже движение?
- Обозначим через f симметрию относительно оси абсцисс, а через h — симметрию относительно точки O (рис. 247).
 - В какие точки переходят точки A и B при движении $f \circ h$?
 - В какие точки переходят точки A и B при движении $h \circ f$?
 - Коммутативна ли композиция движений f и h ?
 - Докажите, что $h \circ f$ есть симметрия относительно оси ординат.

ЗАДАЧИ

354. Начертите треугольник ABC , у которого $\hat{B} = 90^\circ$. Обозначим через f симметрию относительно прямой AB , через g — симметрию относительно прямой AC . а) Постройте и выделите

синим карандашом треугольник T_1 , в который переходит $\triangle ABC$ в результате движения $f \circ g$. б) Постройте и выделите красным карандашом треугольник T_2 , в который переходит $\triangle ABC$ в результате движения $g \circ f$. в) Коммутативна ли композиция осевых симметрий f и g ? г) Конгруэнтны ли треугольники T_1 и T_2 ?

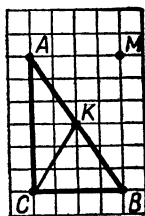


Рис. 248

355. Скопируйте рисунок 248.

- Выполните поворот треугольника ABC вокруг точки M на -90° , а затем центральную симметрию получившейся фигуры относительно той же точки M .
- Установите, каким именно движением (параллельным переносом, поворотом, симметрией) является композиция рассмотренных двух движений.
- Докажите, что композиция рассмотренных движений переводит медиану KC в медиану получившегося треугольника.

356. Постройте треугольник ABC , вершины которого имеют следующие координаты: $A(-4; -1)$; $B(0; -3)$; $C(3; 4)$. а) Постройте треугольник, в который перейдет $\triangle ABC$ в результате композиции симметрий относительно оси абсцисс и оси ординат.

б) Постройте треугольник, в который перейдет $\triangle ABC$ в результате композиции симметрий относительно оси ординат и оси абсцисс.

в) Обладает ли композиция указанных симметрий свойством коммутативности?

357. Начертите квадрат $ABCD$. Обозначим через h симметрию относительно прямой AD , через p — симметрию относительно прямой CD .

а) Постройте и выделите зеленым карандашом квадрат, получившийся в результате движения $h \circ p$.

б) Постройте и выделите синим карандашом квадрат, получившийся в результате движения $p \circ h$.

в) Коммутативна ли композиция движений h и p ?

50. ВЕКТОР

На рисунке 249 изображены фигура F и фигура F_1 , полученная параллельным переносом фигуры F . От точек A , B и C фигуры F проведены отрезки к точкам A_1 , B_1 и C_1 , в которые они переходят в результате параллельного переноса. На каждом из этих отрезков указано направление от точки, принадлежащей фигу-

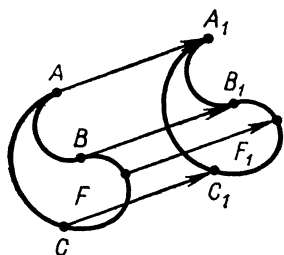


Рис. 249

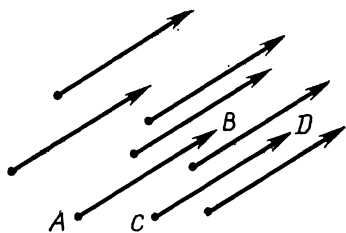


Рис. 250

ре F , к соответствующей точке фигуры F_1 . Эти отрезки имеют равные длины, параллельны и одинаково направлены. Такие направленные отрезки будем считать эквивалентными. Множество всех эквивалентных между собой направленных отрезков называется *вектором*.

Вектор представляет собой бесконечное множество направленных отрезков, и потому изобразить на чертеже все эти направленные отрезки не представляется возможным. Обычно изображают несколько направленных отрезков, составляющих вектор (рис. 250), или даже только один из этих направленных отрезков (рис. 251).

Каждый из направленных отрезков, составляющих вектор, называется *представителем* этого вектора.

Вектор, представителем которого является направленный отрезок, идущий от точки A к точке B (рис. 251), обозначается через $\overrightarrow{AB}$. Таким образом, если направленный отрезок, идущий от точки A к точке B , эквивалентен направленному отрезку, идущему от точки C к точке D (рис. 250), то $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ — это один и тот же вектор (представителями которого являются оба указанных направленных отрезка), т. е. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Например, на рис. 249

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}.$$

Иногда векторы обозначают одной малой латинской буквой со стрелкой над ней, т. е. пишут $\vec{a}$, $\vec{b}$ и т. д. Если на чертеже изображен направленный отрезок и около него поставлена, например, буква $\vec{a}$, то это означает, что через $\vec{a}$ обозначается

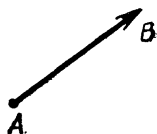


Рис. 251

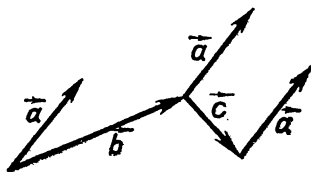


Рис. 252

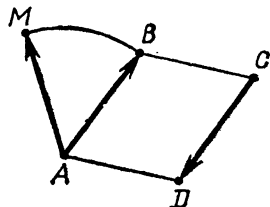


Рис. 253

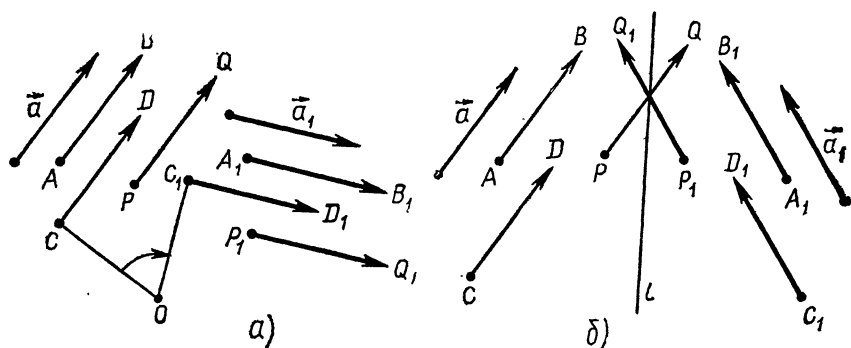


Рис. 254

вектор, представителем которого является изображенный направленный отрезок. На рисунке 252 у нескольких направленных отрезков поставлена одна и та же буква $\vec{a}$ (поскольку эти направленные отрезки эквивалентны и потому задают один и тот же вектор).

Все направленные отрезки, составляющие вектор $\vec{a}$, имеют одну и ту же длину. Эта длина обозначается через $|\vec{a}|$ и называется *длиной* вектора $\vec{a}$.

На рисунке 253 $\vec{AB} \neq \vec{AM}$, $\vec{AB} \neq \vec{CD}$. Действительно, векторы $\vec{AB}$, $\vec{CD}$ и $\vec{AM}$ хотя и имеют одинаковые длины, но направления их неодинаковы: векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AM}$ не параллельны, а векторы $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ параллельны, но их направления противоположны.

Два параллельных вектора, имеющих одинаковые длины, но противоположные направления, называются *противоположными векторами*. Таким образом, векторы $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ на рисунке 253 противоположные.

Если один из двух противоположных векторов обозначен через $\vec{a}$, то второй обозначают через $-\vec{a}$.

На рисунке 254,а изображены направленные отрезки AB , CD , PQ , являющиеся представителями вектора $\vec{a}$, и направленные отрезки A_1B_1 , C_1D_1 , P_1Q_1 , получающиеся из них поворотом на угол -67° вокруг точки O . Направленные отрезки A_1B_1 , C_1D_1 , P_1Q_1 эквивалентны между собой, т. е. являются представителями некоторого вектора $\vec{a}_1$. Говорят, что вектор $\vec{a}_1$ получен поворотом вектора $\vec{a}$ на угол -67° . Аналогично можно определить вектор, получаемый из данного вектора $\vec{a}$ при осевой симметрии (рис. 254,б) или любым другим движением.

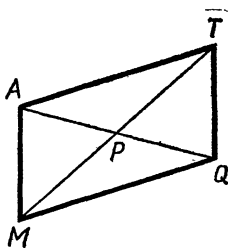


Рис. 255

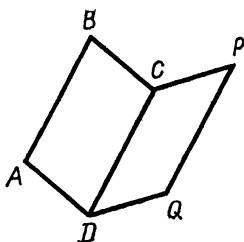


Рис. 256

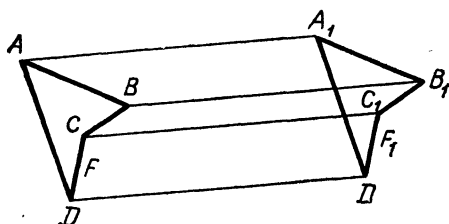


Рис. 257

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Укажите в параллелограмме $МАТQ$ (рис. 255) несколько пар эквивалентных направленных отрезков.
- б) Воспользовавшись рисунком 256, укажите несколько равных векторов.
- в) Фигура F_1 получена из F (рис. 257) параллельным переносом. Укажите равные векторы.
- г) На рисунках 255, 256, 257 укажите противоположные векторы.
- д) Верно ли следующее высказывание: если конгруэнтные отрезки MH и PT перпендикулярны одной и той же прямой, то $\vec{MH} = \vec{PT}$?
- е) Докажите, что рассмотренное в этом пункте отношение эквивалентности направленных отрезков рефлексивно, симметрично и транзитивно.

ЗАДАЧИ

358. Начертите в тетради два направленных отрезка, обозначьте их концы, запишите векторы, представителями которых они являются.
359. Начертите в тетради треугольник ABC . Постройте такую точку P , что $\vec{AP} = \vec{BC}$.
360. Параллелограммы $ABCD$ и $CDMP$ имеют общую сторону CD . Запишите равенство трех векторов.
361. Точки K , T , P и H — середины сторон AB , BC , CD и DA произвольного четырехугольника $ABCD$. Докажите, что $\vec{KT} = \vec{HP}$.
362. Докажите, что при параллельном переносе любой направленный отрезок переходит в эквивалентный ему направленный отрезок.

363. Возьмите прямую l и две точки A, B . Постройте точки A_1, B_1 , симметричные точкам A, B относительно прямой l . Вектор $\vec{a}_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$ симметричен вектору $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ относительно прямой l . В каком случае справедливо равенство $\vec{a}_1 = \vec{a}$? В каком случае $\vec{a}_1 = -\vec{a}$?
364. Начертите вектор $\vec{a}$, длина которого равна 3 см. Постройте вектор $-\vec{a}$. Чему равна длина вектора $-\vec{a}$?
365. Докажите, что при центральной симметрии каждый вектор переходит в противоположный ему вектор.
-
366. Начертите пятиугольник $ABCDE$ и возьмите вне его точку P . Постройте пятиугольник, полученный из $ABCDE$ с помощью параллельного переноса, переводящего точку A в точку P . Обозначьте вершины полученного пятиугольника и укажите равные векторы.
367. Начертите в тетради представителей двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющих равные длины и противоположные направления. Постройте вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$. Что можно сказать о векторе $\overrightarrow{BA}$?
368. Средняя линия PO параллелограмма $ABCD$ служит также средней линией параллелограмма $MKTH$. Сделайте чертеж и найдите на нем пять равных векторов.
369. Примите произвольную точку O за центр поворота и выполните поворот вектора $\vec{m}$ на угол:
а) 60° ; б) -120° .
Каким образом получаются друг из друга два построенных вектора?

51. СУММА ВЕКТОРОВ

Рассмотрим некоторый вектор $\vec{a}$. Пусть A — произвольная точка плоскости. Среди направленных отрезков, являющихся представителями вектора $\vec{a}$, имеется направленный отрезок, начинающийся в точке A (рис. 258). Иначе говоря, существует такая точка B , что направленный отрезок, идущий от точки A к точке B , является представителем вектора $\vec{a}$, т. е. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Нахождение этой точки B называют *откладыванием* вектора $\vec{a}$ от точки

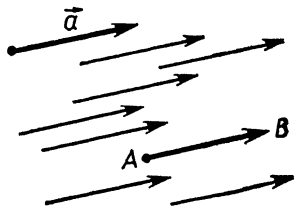


Рис. 258

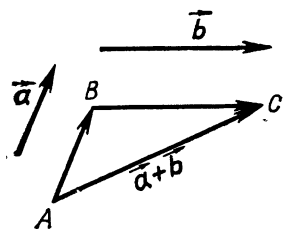


Рис. 259

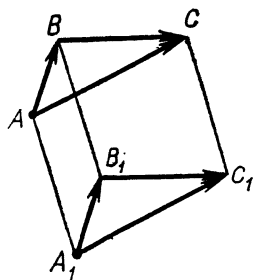
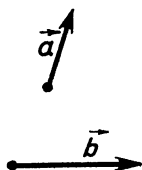


Рис. 260

А. Точка B , о которой идет речь, определена однозначно (т. е. имеется только одна такая точка).

В математике слова «существует и определено однозначно» (или «существует и притом только одно») принято для краткости заменять знаком $\exists!$ Таким образом,

$$(\forall \vec{a}, A) (\exists! B) (\overrightarrow{AB} = \vec{a}).$$

Операция откладывания вектора используется при определении суммы векторов. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два вектора на плоскости. Возьмем на плоскости произвольную точку A и отложим вектор $\vec{a}$ от точки A , т. е. найдем такую точку B , что $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ (рис. 259). Затем от точки B отложим вектор $\vec{b}$, т. е. найдем такую точку C , что $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется *суммой* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается через $\vec{a} + \vec{b}$.

Из определения суммы двух векторов непосредственно следует, что для любых трех точек A , B и C справедливо равенство

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Это соотношение (его называют *правилом трех точек*) позволяет выполнять сложение векторов, не прибегая к чертежу. Например: $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{PK}$; $\overrightarrow{FL} + \overrightarrow{LQ} = \overrightarrow{FQ}$ и т. д.

З а м е ч а н и е. Согласно определению, для построения суммы $\vec{a} + \vec{b}$ нужно не только знать векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, но, кроме того, выбрать некоторую точку A , от которой откладывается вектор $\vec{a}$. Однако если заменить точку A другой точкой A_1 , то направленный отрезок, идущий от точки A к C , заменится эквивалентным ему направленным отрезком (рис. 260), т. е. сумма $\vec{a} + \vec{b}$ не зависит от выбора точки A . Иначе говоря, сложение векторов выполняется при помощи выбора представителей, но окончательный результат (т. е. сумма векторов) не зависит от выбора представителей, а определен однозначно.

Доказательство этого факта здесь не приводится.

Аналогично можно получить сумму не только двух, но также трех и большего числа векторов. Например, чтобы получить сумму $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, выбирается произвольная точка A , от нее откладывается вектор $\vec{AB} = \vec{a}$, затем от точки B откладывается вектор $\vec{BC} = \vec{b}$ и, наконец, от точки C — вектор $\vec{CD} = \vec{c}$ (рис. 261); полученный вектор $\vec{AD}$ называют суммой векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{AD}.$$

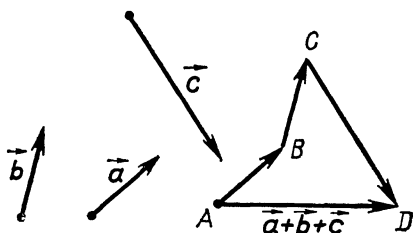


Рис. 261

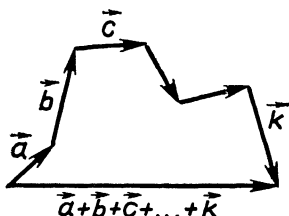


Рис. 262

Вообще, если направленные отрезки, являющиеся представителями векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ..., $\vec{k}$, последовательно отложены друг за другом (т. е. начало второго направленного отрезка совпадает с концом первого, начало третьего — с концом второго и т. д.), то сумма $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \dots + \vec{k}$ будет иметь своим представителем «замыкающий» направленный отрезок, идущий от начала первого направленного отрезка к концу последнего (рис. 262).

При нахождении суммы векторов может получиться вектор, изображаемый направленным отрезком, начало и конец которого совпадают. Например, применяя правило трех точек к противоположным векторам $\vec{AB}$ и $\vec{BA}$, получаем:

$$\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA}.$$

Вектор $\vec{AA}$ изображается «отрезком нулевой длины», т. е. точкой, и не имеет какого-либо определенного направления. Такой вектор нельзя исключить из рассмотрения, так как иначе противоположные векторы $\vec{AB}$ и $\vec{BA}$ не имели бы суммы.

Вектор, изображаемый направленным отрезком, у которого начало и конец совпадают, называют *нулевым* вектором и обозначают через $\vec{0}$:

$$\vec{AA} = \vec{0}.$$

Нулевой вектор может получиться при нахождении суммы не только двух, но и большего числа векторов. Если, откладывая один за другим направленные отрезки, являющиеся представителями векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ..., $\vec{k}$, мы получаем «замкнутую

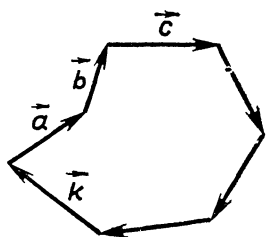


Рис. 263

векторную ломаную» (т. е. если конец последнего направленного отрезка совпадает с началом первого, рис. 263), то сумма векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{k}$ будет равна нулевому вектору:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \dots + \vec{k} = \vec{0}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Назовите по рисунку 264 вектор, равный сумме векторов: 1) $\vec{DC} + \vec{BC}$; 2) $\vec{AC} + \vec{BA}$; 3) $\vec{BD} + \vec{DC}$.
- б) Вектор $\vec{BD}$ (рис. 265) двумя способами представьте в виде суммы двух векторов.

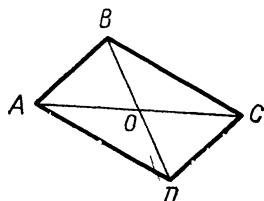


Рис. 264

- в) Является ли вектор $\vec{m}$ на рисунке 266 суммой векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$?
- г) Назовите по рисунку 267 вектор, который является суммой векторов: 1) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF}$; 2) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF} + \vec{FA}$.
- д) При каком условии сумма векторов $\vec{KA} + \vec{AB} + \vec{CP}$ (рис. 268) будет нулевым вектором?

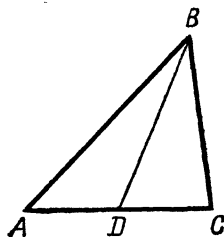


Рис. 265

ЗАДАЧИ

370. Постройте точки $A(2; 2)$, $B(3; 2)$, $C(0; -2)$, $D(1; -4)$, $M(5; -1)$, $K(1; -2)$. Найдите сумму векторов: а) $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$; б) $\vec{AB}$ и $\vec{MK}$; в) $\vec{CD}$ и $\vec{MK}$.

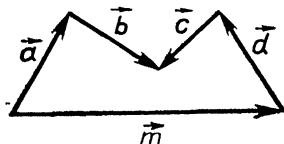


Рис. 266

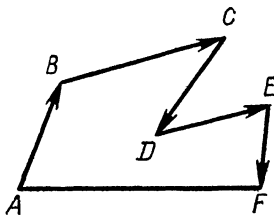


Рис. 267

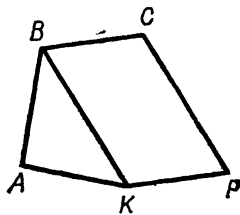


Рис. 268

371. Какие из следующих высказываний истинны:

а) $(\exists \vec{a}, \vec{b}) \quad (|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|)$;

б) $(\forall \vec{a}, \vec{b}) \quad (|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|)$;

в) $(\exists \vec{a}, \vec{b}) \quad (|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|)$;

г) $(\forall \vec{a}, \vec{b}) \quad (|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|)$?

372. Вершинами шестиугольника $ABCDEF$ служат точки, делящие окружность на шесть конгруэнтных частей. Выразите векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{ED}$ через векторы $\vec{p} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{q} = \overrightarrow{AF}$.

373. Точки D , E и F — середины сторон BC , AC и AB треугольника ABC . Выразите вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы, изображаемые направленными отрезками, началом и концом каждого из которых служат какие-либо из точек B , C , E , F .

374. Отметим точки $A(-1; -2)$, $B(4; 1)$, $C(2; 2)$, $D(-1; 2)$, $M(-2; 1)$, $N(-2; -2)$. Постройте вектор, равный сумме указанных векторов, предварительно упростив сумму с помощью правила трех точек:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$;

б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NM}$;

в) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}$;

г) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MN}$.

375. Начертите векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MK}$. Постройте такой вектор $\overrightarrow{CD}$, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

376. Известно, что $|\overrightarrow{AB}| = 3$ см, $|\overrightarrow{CD}| = 5$ см. Постройте векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ так, чтобы длина вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ была: а) наибольшей; б) наименьшей.

377. Воспользовавшись условием задачи 374, постройте следующие векторы:

а) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC}$;

б) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{NM}$;

в) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$.

52. КОМПОЗИЦИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЕРЕНОСОВ

Если указан направленный отрезок, идущий от точки A к точке A_1 , в которую переходит точка A в результате параллельного переноса t (рис. 249), то параллельный перенос t полностью определяется. Здесь в качестве A можно взять любую точку плоскости, так, например, что каждый из направленных отрезков, указанных на рисунке 249, определяет тот же парал-

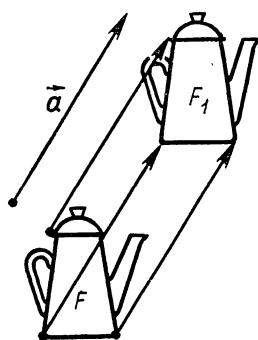


Рис. 269

лельный перенос. На этом основании вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$ называется *вектором параллельного переноса*.

На рисунке 269 изображены фигура F и фигура F_1 , получающаяся из фигуры F параллельным переносом; на этом рисунке указан также вектор $\vec{a}$, служащий вектором этого параллельного переноса. Для краткости говорят еще так: *фигура F_1 получается из фигуры F параллельным переносом на вектор $\vec{a}$* .

При параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ точка A переходит в такую точку A_1 , что $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$; иначе говоря, точка A переходит в точку A_1 , получающуюся откладыванием вектора $\vec{a}$ от точки A .

Теорема. *Композиция параллельного переноса на вектор $\vec{a}$ и параллельного переноса на вектор $\vec{b}$ представляет собой параллельный перенос на вектор $\vec{a} + \vec{b}$.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку A . При параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ точка A переходит в такую точку A_1 , что $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$. Далее, при параллельном переносе на вектор $\vec{b}$ точка A_1 переходит в такую точку A_2 , что $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{b}$ (рис. 270). При композиции двух рассмотренных переносов точка A сразу переходит в A_2 . Но в силу правила трех точек

$$\overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1A_2}, \text{ т. е. } \overrightarrow{AA_2} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Таким образом, точка A_2 получается из точки A переносом на вектор $\vec{a} + \vec{b}$.

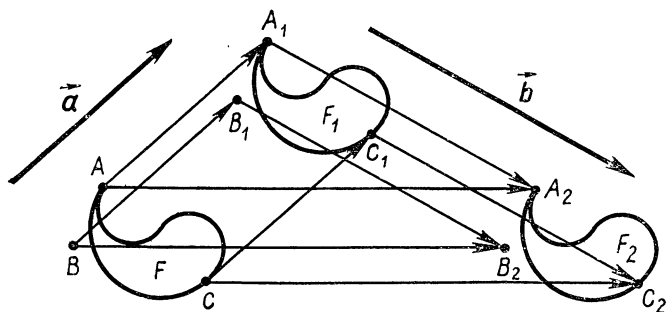


Рис. 270

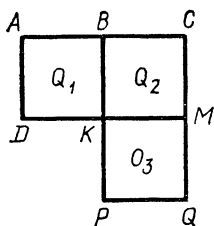


Рис. 271

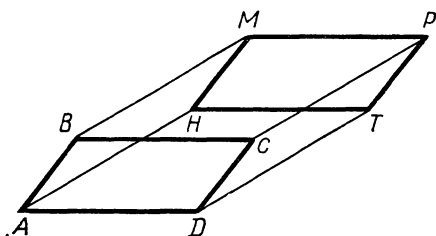


Рис. 272

Проведенное рассуждение применимо к любой точке (т. е. вместо A можно взять любую другую точку; например, точка B в результате композиции двух параллельных переносов перейдет в такую точку B_2 , что $\overrightarrow{BB_2} = \vec{a} + \vec{b}$). Это и означает, что композиция параллельных переносов на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть параллельный перенос на вектор $\vec{a} + \vec{b}$.

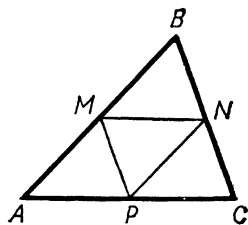


Рис. 273

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Укажите: 1) вектор параллельного переноса f , переводящего квадрат Q_1 в Q_2 (рис. 271); 2) вектор параллельного переноса g , переводящего квадрат Q_2 в Q_3 . Можно ли получить квадрат Q_3 из Q_1 параллельным переносом? На какой вектор следует выполнить этот параллельный перенос?
- Параллелограмм $HMPT$ получен параллельным переносом параллелограмма $ABCD$ на вектор $\overrightarrow{BM}$ (рис. 272). 1) Найдите точку, в которую переходит при этом переносе точка D . 2) Какая точка переходит в точку H ? 3) Укажите на рисунке 272 конгруэнтные отрезки.
- В треугольнике ABC проведены средние линии (рис. 273). Обозначим через f параллельный перенос, переводящий треугольник AMP в треугольник PNC , а через g — параллельный перенос, переводящий треугольник PNC в треугольник MBN . Укажите векторы этих параллельных переносов. Что представляет собой композиция этих параллельных переносов? Укажите на рисунке 273 конгруэнтные треугольники.

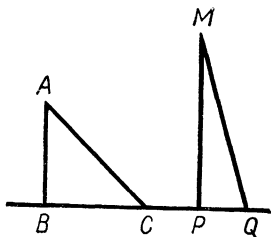


Рис. 274

378. Отметьте на координатной плоскости точки $A(0; 1)$, $B(2; 0)$, $C(1; 1)$, $M(1; 2)$, $N(-2; 1)$. Выполните параллельный перенос треугольника ABC : а) на вектор $\overrightarrow{MN}$; б) на вектор $\overrightarrow{NM}$.
379. Перечертите в тетрадь рисунок 274 и постройте треугольник T , получающийся из треугольника ABC параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{BP}$. Через точку пересечения гипотенуз треугольников T и MPQ проведите прямую l , параллельную (BQ) . Докажите, что прямая l отсекает из треугольников ABC и MPQ конгруэнтные отрезки.
380. Две конгруэнтные окружности с центрами A и B пересекаются в точках M и N . Через точку M проведена прямая l , параллельная (AB) . Докажите, что прямая l отсекает в этих окружностях конгруэнтные хорды.
381. Начертите трапецию $ABCD$ ($[BC]$ — верхнее основание).
а) Постройте вектор параллельного переноса, служащего композицией параллельных переносов на векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.
б) Постройте трапецию $A_1B_1C_1D_1$, в которую перейдет трапеция $ABCD$ при этой композиции.
382. Начертите два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MK}$ и треугольник ABC . Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, в который перейдет треугольник ABC в результате композиции параллельных переносов на векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MK}$.

383. Начертите окружность l и два непараллельных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Выполните параллельный перенос окружности l : а) на вектор $\vec{a}$; б) на вектор $\vec{b}$; в) на вектор $\vec{a} + \vec{b}$. Вершинами какого четырехугольника служат центры всех окружностей?

384. Начертите два равнобедренных треугольника, как показано на рисунке 275. Проведите прямую, параллельную их основаниям так, чтобы отрезки этой прямой, заключенные внутри треугольников, были конгруэнтны.



Рис. 275

385. Начертите параллелограмм $ABCD$. Композиция параллельных переносов на векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CB}$ также является параллельным переносом. Укажите вектор этого переноса.

53. СВОЙСТВА СУММЫ ВЕКТОРОВ

I. Нулевой вектор обладает свойством

$$(\forall \vec{a})(\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}).$$

В самом деле, возьмем вектор $\vec{AB} = \vec{a}$. Для нахождения суммы $\vec{a} + \vec{0}$ нужно от точки B отложить вектор $\vec{0}$, т. е. взять вектор $\vec{BB}$. Согласно правилу трех точек

$$\vec{AB} + \vec{BB} = \vec{AB}, \quad \text{т. е. } \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

II. Сумма двух противоположных векторов равна нулевому вектору:

$$(\forall \vec{a})(\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}).$$

Действительно, пусть $\vec{a} = \vec{AB}$ и $-\vec{a} = \vec{CD}$ — два противоположных вектора (рис. 276), т. е. $\vec{CD} = \vec{BA}$. Тогда

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}.$$

III. Сложение векторов коммутативно, т. е.

$$(\forall \vec{a}, \vec{b})(\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}).$$

Рассмотрим вначале случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не параллельны. Отложим от произвольной точки A вектор $\vec{AB} = \vec{a}$, а от полученной точки B отложим вектор $\vec{BC} = \vec{b}$ (рис. 277). Тогда по определению

$$\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Отложим теперь от точки A вектор $\vec{AD} = \vec{b}$. Так как отрезки BC и AD конгруэнтны и параллельны (по построению), то $ABCD$ — параллелограмм. Отсюда вытекает, что $\vec{AB} = \vec{DC}$, т. е. $\vec{DC} = \vec{a}$. Следовательно,

$$\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{DC} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Итак, вектор $\vec{AC}$ равен каждому из векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{b} + \vec{a}$, откуда и следует равенство $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Предположим теперь, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны. Если их направление одинаково, то вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет то же направ-

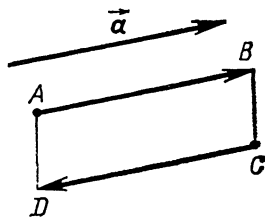


Рис. 276

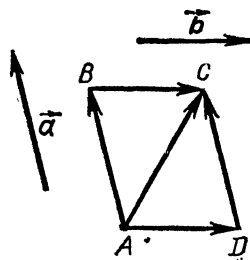


Рис. 277

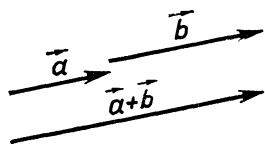


Рис. 278

ление и длину $|\vec{a}| + |\vec{b}|$ (рис. 278). Вектор $\vec{b} + \vec{a}$ имеет то же направление и ту же длину (поскольку $|\vec{b}| + |\vec{a}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$). Следовательно, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены, доказательство аналогично.

Замечание: Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не параллельны, то четырехугольник $ABCD$ на рисунке 277 — параллелограмм. Отсюда следует, что нахождение суммы двух непараллельных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно осуществить следующим образом: надо от точки A отложить векторы $\vec{AB} = \vec{a}$ и $\vec{AD} = \vec{b}$, а затем построить параллелограмм $ABCD$. Тогда вектор $\vec{AC}$, изображаемый диагональю этого параллелограмма, и будет равен сумме $\vec{a} + \vec{b}$. Этот способ построения суммы двух непараллельных векторов носит название *правила параллелограмма*. Его часто применяют в физике.

IV. Сложение векторов обладает ассоциативным (сочетательным) свойством:

$$(\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}).$$

Отложим от произвольной точки O вектор $\vec{OA} = \vec{a}$, от точки A — вектор $\vec{AB} = \vec{b}$ и от точки B — вектор $\vec{BC} = \vec{c}$. Тогда согласно правилу трех точек,

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{OA} + (\vec{AB} + \vec{BC}) = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC};$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\vec{OA} + \vec{AB}) + \vec{BC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC}.$$

Таким образом, векторы $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ и $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ совпадают между собой.

Так как $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, то каждый из векторов $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ и $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ равен вектору $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, т. е.

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

Замечание. Коммутативность и ассоциативность сложения означают, что в векторной сумме можно как угодно переставлять и группировать слагаемые. Например:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{d});$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = (\vec{a} + \vec{c}) + (\vec{b} + \vec{d});$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = (\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})) + \vec{d}$$

и т. д.

- а) Верно ли, что композиция параллельных переносов обладает свойством коммутативности, т. е.

($\forall f, g$, где f и g — параллельные переносы) ($f \circ g = g \circ f$)?

- б) Дан параллелограмм $ABCD$ и точка M (рис. 279). Точка M'' получена в результате выполнения двух параллельных переносов точки M : сначала на вектор $\vec{AB}$, а потом на вектор $\vec{BC}$. Точка M_2 также получена в результате выполнения двух параллельных переносов точки M : сначала на вектор $\vec{AD}$, а потом на вектор $\vec{DC}$. Докажите, что точки M'' и M_2 совпадают.

- в) Укажите, какие свойства сложения векторов использованы при выполнении следующих преобразований:

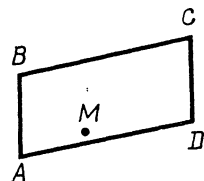


Рис. 279

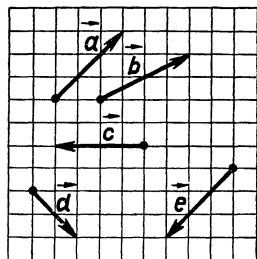


Рис. 280

$$(\vec{CD} + \vec{AB}) + \vec{BC} = \vec{CD} + (\vec{AB} + \vec{BC}) = \vec{CD} + \vec{AC} = \\ = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}.$$

- г) Чему равна сумма векторов $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{DC} + \vec{BA}$? Какие свойства сложения векторов использовались?

ЗАДАЧИ

386. Докажите (не прибегая к чертежу), что

$$\vec{MK} + \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{MK}.$$

387. Сбозначьте через O точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Докажите, что

$$\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OD} + \vec{OB}.$$

388. Докажите, что сумма векторов, которые изображаются направленными отрезками, идущими из центра окружности к точкам, делящим окружность на шесть конгруэнтных дуг, равна нулевому вектору.

389. Перечертите в тетрадь рисунок 280. Найдите наиболее экономным способом сумму $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$.

390. Точка O — центр параллелограмма $ABCD$. Упростите следующие выражения:

$$(\vec{AB} + \vec{DO}) + \vec{OA}; \quad (\vec{BC} + \vec{OA}) + \vec{OD}; \\ \vec{OA} + \vec{BC} + \vec{DO} + \vec{CD}.$$

391. Даны параллелограмм $MNPQ$ и точка A . Выразите вектор $\vec{AQ}$ через векторы $\vec{AM} = \vec{m}$, $\vec{NA} = \vec{n}$ и $\vec{AP} = \vec{p}$.

392. Докажите, что существует замкнутая ломаная, звенья которой конгруэнтны и параллельны диагоналям данного пятиугольника. Будет ли искомая ломаная единственной?

393. Не прибегая к чертежу, найдите сумму векторов $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DA}$ и $\vec{AD}$; сумму векторов $\vec{MK}$, $\vec{CD}$, $\vec{KC}$ и $\vec{DM}$.

394. Возьмите два параллельных вектора $\vec{m}$, $\vec{n}$ и точку T .

а) Отложите от точки T вектор $\vec{TA} = \vec{m}$, а от его конца — вектор $\vec{AB} = \vec{n}$.

б) Отложите от той же точки T сначала вектор $\vec{TC} = \vec{n}$, а от его конца — вектор $\vec{CD} = \vec{m}$.

Совпадают ли точки B и D ? Почему?

395. Упростите следующие выражения:

$$\text{а) } \vec{KM} + (\vec{PT} + (\vec{TK} + \vec{MP})); \\ \text{б) } \vec{TM} + (\vec{KT} + \vec{HK}) + \vec{MH}.$$

Какие свойства суммы векторов были при этом использованы?

396. Дан пятиугольник $KLMNP$. Выразите несколькими способами вектор $\vec{KL}$ в виде суммы векторов, которые изображаются направленными отрезками, идущими по сторонам или диагоналям пятиугольника.

54. СХОДСТВО В ДЕЙСТВИЯХ НАД ВЕКТОРАМИ И ЧИСЛАМИ

Как мы видели в предыдущем пункте, свойства сложения оказались для векторов *такими же*, как и для чисел. Следующая теорема также показывает сходство в действиях над векторами и числами.

Теорема. Для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ уравнение $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ имеет единственное решение:

$$\vec{x} = \vec{b} + (-\vec{a}). \quad (1)$$

Проверим прежде всего, что вектор (1) удовлетворяет написанному уравнению:

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{x} &= \vec{a} + (\vec{b} + (-\vec{a})) = \vec{a} + ((-\vec{a}) + \vec{b}) = (\vec{a} + (-\vec{a})) + \vec{b} = \\ &= \vec{0} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}.\end{aligned}$$

Итак, вектор $\vec{b} + (-\vec{a})$ является решением уравнения $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$, чем установлено *существование* решения.

Теперь докажем *единственность* решения, т. е. докажем, что рассматриваемое уравнение не имеет двух различных решений.

Пусть каждый из векторов $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ является решением уравнения, т. е.

$$\vec{a} + \vec{x}_1 = \vec{b} \quad \text{и} \quad \vec{a} + \vec{x}_2 = \vec{b}. \quad (2)$$

Докажем, что в этом случае $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$.

Из равенств (2) следует, что

$$\vec{a} + \vec{x}_1 = \vec{a} + \vec{x}_2.$$

Прибавим к вектору $(-\vec{a})$ равные между собой векторы $\vec{a} + \vec{x}_1$ и $\vec{a} + \vec{x}_2$:

$$(-\vec{a}) + (\vec{a} + \vec{x}_1) = (-\vec{a}) + (\vec{a} + \vec{x}_2).$$

В силу ассоциативности сложения это равенство можно переписать в виде:

$$((-\vec{a}) + \vec{a}) + \vec{x}_1 = ((-\vec{a}) + \vec{a}) + \vec{x}_2,$$

откуда следует, что $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$.

Доказанную теорему можно сформулировать следующим образом:

$$(\forall \vec{a}, \vec{b}) (\exists! \vec{x}) (\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}).$$

Для краткости вектор $\vec{b} + (-\vec{a})$ принято обозначать через $\vec{b} - \vec{a}$; этот вектор называют *разностью* векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$.

Таким образом, равенства $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ и $\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$ означают одно и то же, т. е. если вектор $\vec{x}$ удовлетворяет равенству $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$, то $\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$, и обратно. Иначе говоря, в векторном равенстве можно слагаемое перенести в другую часть равенства, меняя стоящий перед этим слагаемым знак на противоположный.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Для каких из чертежей (рис. 281) справедливо равенство $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$?
- Какой из векторов является разностью двух других:

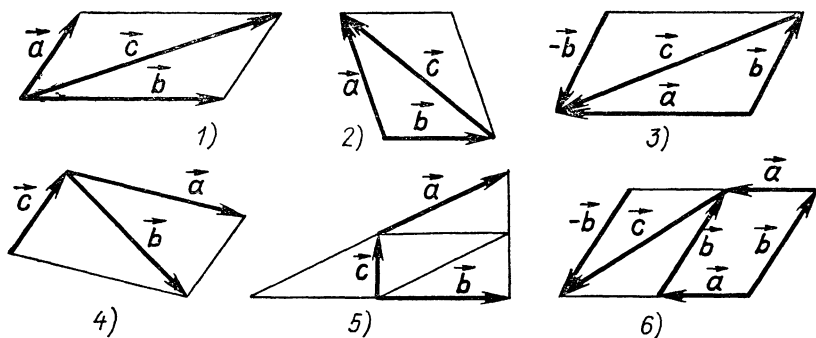


Рис. 281

- 1) $\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{b} - \vec{c}$; $\vec{a} + \vec{c}$;
- 2) $\vec{m} + \vec{p} - \vec{r}$; $\vec{m} + \vec{q}$; $\vec{q} + \vec{r} - \vec{p}$?

в) Воспользовавшись единственностью решения векторного уравнения и не перенося слагаемые из одной части в другую, укажите сразу решения следующих уравнений:

- 1) $\vec{x} + \vec{a} - \vec{b} + \vec{d} = \vec{m} + \vec{a} - \vec{b} + \vec{d}$;
- 2) $\vec{p} + \vec{q} - \vec{x} = -\vec{a} + \vec{p} + \vec{q}$.

ЗАДАЧИ

397. Начертите два вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Постройте вектор $\vec{x}$, для которого $\vec{m} + \vec{x} = \vec{n}$.
398. Проверьте, не прибегая к чертежу, что вектор $\vec{y} = \vec{a} + (-\vec{b})$ удовлетворяет уравнению $\vec{y} + \vec{b} = \vec{a}$.
399. Определите неизвестный вектор из уравнений:
 - а) $\vec{a} + \vec{x} - \vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$;
 - б) $\vec{a} - \vec{x} = \vec{c} - \vec{b} + \vec{a}$.
400. Докажите, что если $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}$, причем точки A , B , C и D не лежат на одной прямой, то $ABCD$ — параллелограмм.
401. Докажите, что длина вектора $\vec{a} - \vec{b}$ не больше суммы длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
402. Постройте ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, для которых $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$.

403. Возьмите векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте вектор $\vec{a}-\vec{b}$.

404. Определите неизвестный вектор $\vec{x}$ из уравнений:

а) $\vec{x} + \vec{a} = \vec{a} - \vec{b}$;

б) $\vec{x} - \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$.

Проверьте правильность решения, подставив его в исходное уравнение.

405. Точки O, A, B, C, M расположены таким образом, что $\vec{OB} = \vec{OM} + \vec{OA}$, $\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OA}$ и $|OA| = |OB| = |OC|$.

Найдите величину угла $\widehat{AOM}$.

55. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОТ ПРОТИВНОГО

В предыдущем пункте при доказательстве единственности решения уравнения

$$\vec{a} + \vec{x} = \vec{b} \quad (1)$$

был применен способ рассуждения, который в математике называют *методом доказательства от противного*. Вспомним, как проводилось это доказательство.

Нужно было установить, что невозможно найти два различных вектора $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$, каждый из которых был бы решением уравнения (1). Не имея возможности непосредственно доказать это, мы решили посмотреть, что получится, если допустить существование двух различных решений $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$:

$$\vec{a} + \vec{x}_1 = \vec{b}; \quad \vec{a} + \vec{x}_2 = \vec{b}; \quad \vec{x}_1 \neq \vec{x}_2.$$

Рассуждения показали, что из этого вытекает равенство $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$. Таким образом, предположив, что существуют два *различных* решения $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$, мы в процессе рассуждения пришли к выводу $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$, который противоречит исходному предположению. Значит, мы не можем допустить существование двух различных решений уравнения (1).

Итак, чтобы доказать справедливость нужного нам утверждения (не существует двух различных решений уравнения (1)), мы предположили, что это утверждение *неверно* т. е. что верно его отрицание (*существуют* два различных решения уравнения (1)). Затем при помощи рассуждений убедились, что это предположение приводит к противоречию. Отсюда делается вывод, что отрицание исходного утверждения ложно и, значит, истинным является исходное утверждение.

Применим тот же метод рассуждения для решения следующей задачи.

Задача. Доказать, что выпуклый многоугольник не может иметь более трех острых углов.

Доказательство. Предположим, что доказываемое утверждение неверно, т. е. что верно его отрицание: *существует выпуклый многоугольник M , имеющий не менее четырех острых углов.*

Рассмотрим внешние углы выпуклого многоугольника M . Так как угол, смежный с острым, является тупым, то у многоугольника M не менее четырех тупых внешних углов. Значит, сумма всех внешних углов выпуклого многоугольника M больше 360° . Но это противоречит теореме о сумме внешних углов выпуклого многоугольника. Полученное противоречие доказывает теорему.

Как и в предыдущем случае, решение этой задачи было проведено методом доказательства от противного: мы предположили, что доказываемое утверждение неверно (т. е. верно его отрицание), и показали, что это приводит к противоречию. Тем самым была установлена ложность отрицания и, следовательно, истинность доказываемого утверждения.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Известно, что число волос на голове человека не превышает 500 000. Докажите, что существует двое людей, у которых число волос на голове одинаково.
- б) В многоугольнике, имеющем $2n - 1$ вершины, проведены n диагоналей. Докажите, что среди проведенных диагоналей найдутся две, имеющие общий конец.

ЗАДАЧИ

Докажите истинность утверждений, сформулированных в заданиях 406—409, используя метод доказательства от противного. Прежде чем приступить к доказательству, в каждом задании выпишите:

- 1) заключение теоремы, которую нужно доказать;
- 2) отрицание этого заключения.

После завершения доказательства запишите, в чем состоит противоречие, доказывающее истинность исходной теоремы.

- 406.** Даны точки A , B и прямая a . Если для любой точки $C \in a$ справедливо неравенство $|AC| + |BC| > |AB|$, то точки A и B лежат по одну сторону прямой a .
- 407.** Если треугольник не является прямоугольным, то центр описанной окружности не лежит на его контуре.
- 408.** Если прямые a и b параллельны и прямая c (лежащая в той же плоскости) пересекает прямую a , то она пересекает и прямую b .

409. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — отличные от нуля векторы. Докажите, что если векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ параллельны, то $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

56. ПРОТИВОПОЛОЖНАЯ ТЕОРЕМА

Рассмотрим теорему:

($\forall F$, где F — четырехугольник) (F — ромб) $\Rightarrow$ (диагонали четырехугольника F перпендикулярны). Здесь условие теоремы « F — ромб» представляет собой предикат, заданный на множестве всех четырехугольников; обозначим этот предикат через $A(F)$. Заключение: «диагонали четырехугольника F перпендикулярны» — также предикат, заданный на множестве всех четырехугольников. Обозначим этот предикат через $B(F)$. Разъяснительная часть указывает, на каком множестве заданы предикаты $A(F)$ и $B(F)$ (на множестве всех четырехугольников). Теперь рассматриваемая теорема может быть кратко записана так:

$$(\forall F) A(F) \Rightarrow B(F).$$

Каждая теорема, записанная в виде: $(\forall F) A(F) \Rightarrow B(F)$, позволяет составить еще три теоремы, показанные на следующей схеме:

$$(\forall F) A(F) \Rightarrow B(F) \quad (1) \qquad (\forall F) B(F) \Rightarrow A(F) \quad (2)$$

$$(\forall F) \neg A(F) \Rightarrow \neg B(F) \quad (3) \qquad (\forall F) \neg B(F) \Rightarrow \neg A(F). \quad (4)$$

По отношению к теореме (1) теорема (2) является обратной.

Теорема (3) получается из исходной теоремы (1) заменой условия и заключения их отрицаниями; она называется *противоположной исходной* теореме (1). Теорема (4) — *противоположная обратной*. Противоположная теорема (если четырехугольник не является ромбом, то его диагонали не перпендикулярны) неверна; контрпример показан на рисунке 282. Теорема, противоположная обратной (если диагонали четырехугольника не перпендикулярны, то он не является ромбом), справедлива. Таким образом, исходная теорема (1) и теорема (4), противоположная обратной, справедливы.

Вообще, теорема, противоположная обратной, равносильна исходной теореме, т. е. если истинна одна теорема, то истинна и другая. В этом нетрудно убедиться, используя метод доказательства от противного.

В самом деле, допустим, что теорема (4) истинна, а исходная теорема (1) неверна, т. е. существует F , для которого высказывание $A(F)$ истинно, а $B(F)$ ложно, и потому истинно $\neg B(F)$. Из истинности $\neg B(F)$ вытекает (в силу теоремы, противоположной обратной), что истинно $\neg A(F)$, т. е. $A(F)$ ложно. Мы получили про-

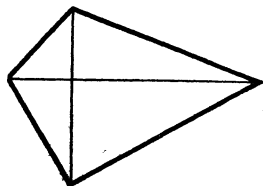


Рис. 282

тиворечие: предполагая $A(F)$ истинным, пришли к тому, что $A(F)$ ложно. Это противоречие и показывает, что если истинна теорема (4), то должна быть истинна и исходная теорема (1).

Аналогично проверяется, что из справедливости теоремы (1) вытекает справедливость теоремы (4).

Равносильность теорем (1) и (4) показывает, что если доказательство исходной теоремы (1) вызывает трудности, то можно вместо нее доказать теорему (4), противоположную обратной.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

а) Рассмотрим следующую теорему:

$(\forall Q, \text{ где } Q \text{ — четырехугольник}) (Q \text{ — прямоугольник}) \Rightarrow (\text{диагонали } Q \text{ конгруэнтны}).$

Верны ли теоремы: 1) обратная; 2) противоположная; 3) противоположная обратной?

б) Рассмотрим следующую теорему:

$(\forall F, \text{ где } F \text{ — параллелограмм}) (F \text{ — ромб}) \Rightarrow (F \text{ имеет ось симметрии}).$

Верны ли теоремы: 1) обратная, 2) противоположная, 3) противоположная обратной?

в) Может ли случиться, что для некоторой теоремы обратная теорема верна, а противоположная нет?

г) Некоторая теорема, записанная в форме (1), справедлива. Какую еще теорему можно доказать, чтобы установить справедливость теоремы

$$(\forall F) \quad A(F) \Leftrightarrow B(F)?$$

ЗАДАЧИ

410. Считая исходной теорему о том, что в случае конгруэнтности накрест лежащих углов, образованных при пересечении двух прямых третьей, эти прямые параллельны, сформулируйте обратную теорему, противоположную и противоположную обратной. В курсе VI класса доказана истинность двух из сформулированных высказываний. Может ли оказаться, что какое-либо из оставшихся двух высказываний ложно?

В задачах 411—413 убедитесь в справедливости теорем, сформулировав и доказав в каждом случае теорему, противоположную обратной.

411. $(\forall \vec{a}, \vec{b}, \text{ где } \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}) (|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|) \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$

412. Если хорда $[BD]$ является биссектрисой вписанного угла ABC , то D — середина дуги AC (т. е. дуги AD и CD конгруэнтны).

413. $(\forall \vec{a}, \vec{b}, \text{ где } \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}) \quad (|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|) \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$.

414. Считая теорему о конгруэнтности углов при основании равнобедренного треугольника исходной, сформулируйте и запишите обратную теорему, противоположную и противоположную обратной.

а) Какие из получившихся высказываний истинны?

б) Сколько теорем нужно доказать, чтобы убедиться в истинности утверждения: конгруэнтность двух сторон треугольника — необходимое и достаточное условие для того, чтобы углы, лежащие против этих сторон, были конгруэнтны?

57. ГРУППА ОТОБРАЖЕНИЙ ПЛОСКОСТИ

Теорема 1. Всякое движение f является взаимно-однозначным отображением плоскости на себя; обратное ему отображение f^{-1} также является движением.

Доказательство. Первое утверждение означает, что если точки A, B различны, то их образы $A_1 = f(A), B_1 = f(B)$ также различны. В самом деле, так как A и B различны, то $|AB| \neq 0$, а поскольку f — движение, $|A_1B_1| = |AB|$. Следовательно, $|A_1B_1| \neq 0$, а это и означает, что точки A_1, B_1 различны.

Второе утверждение означает, что отображение f^{-1} сохраняет расстояние, т. е. если M, N — произвольные точки плоскости и $M' = f^{-1}(M), N' = f^{-1}(N)$ — их образы при отображении f^{-1} , то $|MN| = |M'N'|$. Действительно, равенства $M' = f^{-1}(M), N' = f^{-1}(N)$ означают, что $M = f(M'), N = f(N')$. Поскольку f — движение, справедливо равенство $|MN| = |M'N'|$.

Прежде чем переходить к следующей теореме, уточним понятие конгруэнтности фигур, введенное еще в 4 классе. Там говорилось, что конгруэнтными являются такие две фигуры, которые могут совпасть при «наложении». Ясно, что под «наложением» здесь понимается движение, т. е. отображение, сохраняющее расстояние и переводящее одну фигуру во вторую (см. п. 7). Таким образом, в уточненном виде определение конгруэнтности фигур может быть сформулировано следующим образом: *фигура F называется конгруэнтной фигуре H , если существует такое движение f , которое переводит фигуру F в H , т. е. $f(F) = H$.*

Теорема 2. Конгруэнтность фигур является отношением эквивалентности, т. е. обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Доказательство. Докажем рефлексивность, т. е. установим, что всякая фигура F конгруэнтна самой себе. Действительно, тождественное отображение e плоскости является движением, причем это движение переводит каждую фигуру F в себя: $e(F) = F$. Это и означает, что $F \cong F$.

Докажем симметричность, т. е. установим, что если $F \cong H$, то $H \cong F$. В самом деле, соотношение $F \cong H$ означает, что существует движение f , для которого $f(F) = H$. Так как для движения f существует обратное отображение f^{-1} (теорема 1), то из соотношения $f(F) = H$ вытекает, что $f^{-1}(H) = F$. Но это означает (поскольку f^{-1} есть движение согласно теореме 1), что $H \cong F$.

Наконец докажем транзитивность, т. е. установим, что если $F \cong H$ и $H \cong K$, то $F \cong K$. В самом деле, соотношение $F \cong H$ означает, что существует движение f , для которого $f(F) = H$. Соотношение $H \cong K$ означает, что существует движение g , для которого $g(H) = K$. Отображение $h = g \circ f$ сразу переводит фигуру F в фигуру K , т. е. $h(F) = K$, а так как h есть движение (п. 48), то $F \cong K$.

В проведенном доказательстве были использованы следующие три свойства движений:

- 1) тождественное отображение является движением;
- 2) если f — некоторое движение, то f^{-1} также является движением;
- 3) если f и g — движения, то $g \circ f$ также является движением.

В различных вопросах математики и физики рассматриваются такие множества отображений, которые обладают свойствами, аналогичными сформулированным выше свойствам 1—3. Такие множества отображений называют в математике группами отображений. Приведем определение этого понятия.

Множество G взаимно-однозначных отображений плоскости на себя называется *группой отображений* плоскости, если оно обладает следующими тремя свойствами:

- 1) тождественное отображение e принадлежит G ;
- 2) если $f \in G$, то обратное отображение f^{-1} также принадлежит G ;
- 3) если $f \in G$ и $g \in G$, то $g \circ f$ также принадлежит G .

Таким образом, согласно сказанному выше множество всех движений плоскости представляет собой группу отображений. Другим примером группы отображений является множество всех параллельных переносов. Легко проверяется, что в этом случае свойства 1—3 также выполняются.

З а м е ч а н и е. Если известно, что множество отображений G непусто, то свойство 1 является следствием свойств 2 и 3. В самом деле, если $f \in G$, то $f^{-1} \in G$ согласно свойству 2, а потому $f^{-1} \circ f \in G$ согласно свойству 3. Но $f^{-1} \circ f$ есть тождественное отображение e .

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Отображение r — поворот вокруг точки O на угол n° (рис. 283).
Что представляет собой обратное отображение?
- б) Отображение g — параллельный перенос на вектор $\vec{a}$ (рис. 284).
Что представляет отображение g^{-1} ? Отображение $g \circ g^{-1}$?

в) Докажите, что если s —симметрия относительно прямой l (рис. 285), то отображение s^{-1} совпадает с s . Приведите еще один пример движения f , для которого справедливо равенство $f^{-1} = f$.

г) Пусть f , g и h —параллельные переносы соответственно на векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. При каком соотношении между этими векторами справедливы соотношения:

- 1) $g \circ f = h^{-1}$;
- 2) $g \circ f = e$;
- 3) $g = h^{-1}$?

д) Докажите, что множество всех параллельных переносов образует группу отображений плоскости.

е) Докажите, что если g —движение плоскости, то фигуры F , $g(F)$ и $g^{-1}(F)$ конгруэнтны.

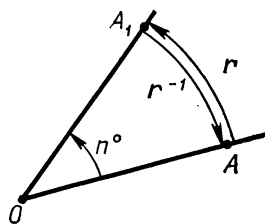


Рис. 283

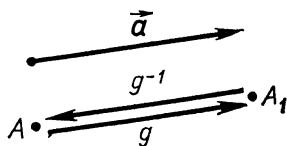


Рис. 284

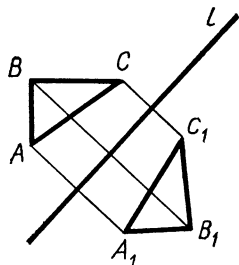


Рис. 285

ЗАДАЧИ

415. Начертите окружность l и отметьте две не принадлежащие ей точки A , B . Постройте окружности $l_1 = t(l)$, $l_2 = t^{-1}(l)$, $l_3 = t^{-1}(l_1)$, где t —параллельный перенос на вектор $\vec{AB}$.
416. Начертите прямую l и не пересекающийся с ней отрезок F . Постройте фигуру $F_1 = s(F)$, где s —симметрия относительно прямой l . Постройте фигуры $s^{-1}(F)$, $s(F_1)$, $s^{-1}(F_1)$. Что представляет собой отображение $s \circ s^{-1}$? $s^{-1} \circ s$?
417. Будет ли группой отображений множество всех поворотов вокруг точки O ?
418. Является ли группой отображений множество всех осевых симметрий?
419. Постройте точку M_1 , симметричную точке M относительно центра O . Выполните после этого поворот точки M_1 относительно точки O на угол 180° . В какую точку перейдет точка M_1 ? Будет ли этот поворот отображением, обратным центральной симметрии?
420. Обозначим через r центральную симметрию с центром O . Отметьте точку $A \neq O$ и постройте точки $B = r(A)$, $B_1 = r^{-1}(A)$, $C = r(B)$. Докажите, что: а) $r = r^{-1}$; б) $r \circ r = e$.
421. Является ли группой отображений множество всех центральных симметрий?

58. ГРУППА САМОСОВМЕЩЕНИЙ ФИГУРЫ

Пусть F — некоторая фигура на плоскости. Обозначим через G множество всех движений плоскости, которые переводят фигуру F саму в себя. Легко убедиться, что множество G представляет собой группу отображений плоскости. В самом деле, тождественное отображение e , очевидно, переводит фигуру F в себя, т. е. $e(F) = F$, и потому $e \in G$. Таким образом, свойство 1 (см. п. 57) выполнено. Далее, если $f \in G$, т. е. отображение f переводит фигуру F в себя, то и отображение f^{-1} переводит фигуру F в себя. Таким образом, свойство 2 также выполнено. Наконец, если $f \in G$, $g \in G$, т. е. каждое из движений f, g переводит фигуру F в себя, то и их композиция $g \circ f$ переводит фигуру F в себя, т. е. $g \circ f \in G$. Значит, свойство 3 также выполняется. Итак, множество G является группой отображений плоскости. Она называется *группой самосовмещений* фигуры F .

Возьмем, например, параллелограмм общего вида, т. е. не являющийся ни прямоугольником, ни ромбом (рис. 286). Существуют два движения, переводящие этот параллелограмм F в себя: тождественное отображение e и симметрия r относительно точки O , в которой пересекаются диагонали параллелограмма F . Других движений плоскости, переводящих параллелограмм F в себя, нет. Таким образом, группа G самосовмещений параллелограмма F состоит из двух элементов: $G = \{e, r\}$. Из того, что группа самосовмещений параллелограмма содержит центральную симметрию r , вытекают все рассмотренные в п. 25 свойства параллелограмма: параллельность и конгруэнтность противоположных сторон, конгруэнтность противоположных углов и т. д.

Вообще, знание группы самосовмещений фигуры F во многом определяет ее геометрические свойства. Например, группа самосовмещений ромба F содержит, кроме e и r , еще две осевые симметрии s_1 и s_2 относительно прямых, на которых расположены диагонали ромба (рис. 287), т. е. в этом случае $G = \{e, r, s_1, s_2\}$. Из наличия в группе G дополнительных (по сравнению с парал-

лелограммом общего вида) движений s_1, s_2 вытекает наличие у ромба дополнительных, специфических свойств (помимо свойств, присущих всякому параллелограмму): перпендикулярность диагоналей, совпадение диагоналей с биссектрисами углов и т. д.

В качестве еще одного примера отметим, что группа самосовмещений равнобедренного треугольника, не являющегося равносторонним (рис. 288), состоит из двух элементов e, s , где s — осевая симметрия. Из наличия в группе самосовмещений равнобед-

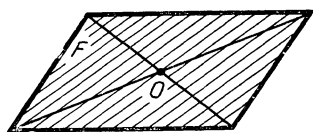


Рис. 286

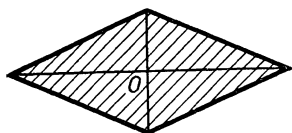


Рис. 287

ренного треугольника движения с вытекают основные свойства равнобедренного треугольника: конгруэнтность углов при основании, совпадение биссектрисы, медианы и высоты, проведенных к основанию, конгруэнтность медиан, проведенных к конгруэнтным сторонам, и т. д.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

а) Какие осевые симметрии принадлежат группе самосовмещений равно-
стороннего треугольника? Какие по-
вороты принадлежат этой группе?
Сколько всего элементов содержит
группа самосовмещений равно-
стороннего треугольника?

б) Сколько элементов содержит группа
самосовмещений каждой из следую-
щих фигур: 1) разностороннего тре-
угольника; 2) окружности; 3) отрез-
ка; 4) фигуры, изображенной на
рисунке 289 (предполагается, что
цепочка треугольников бесконечно
продолжается в обе стороны)?

в) Укажите свойства прямоугольника,
которые вытекают из наличия в его
группе самосовмещений двух осевых
симметрий.

г) *Равнобокой трапецией* называется
четыреугольник, имеющий ось сим-
метрии, не проходящую через его
вершины (рис. 290). Сколько элемен-
тов содержит группа самосовмещений равнобокой трапе-
ции, не являющейся прямоугольником? Укажите несколько
свойств равнобокой трапеции, вытекающих из наличия у
нее оси симметрии.

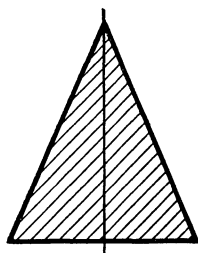


Рис. 288



Рис. 289

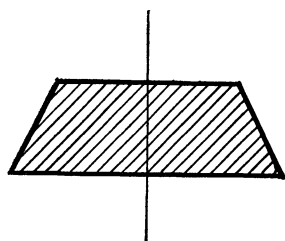


Рис. 290

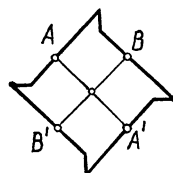


Рис. 291

ЗАДАЧИ

422. а) Множество G содержит 4 элемента: тождественное ото-
бражение e и повороты вокруг заданной точки O на 90° ,
 180° , 270° . Докажите, что G — группа отображений.

б) Проверьте, является ли множество G группой само-
совмещений фигуры F , изображенной на рисунке 291.

423. Постройте фигуру, группа самосовмещений которой содер-
жит 6 элементов.

424. *Дельтоидом* называется четырехугольник, имеющий ось сим-
метрии, проходящую через две его вершины. Постройте

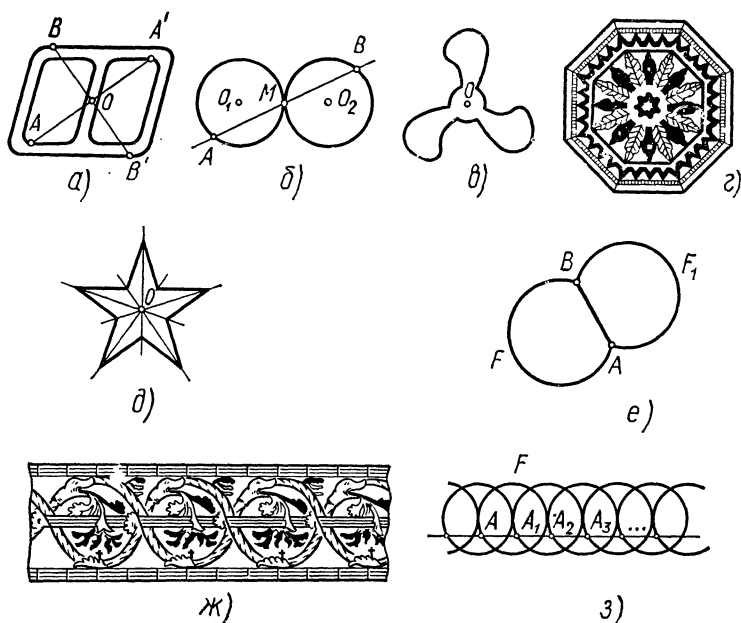


Рис. 292

дельтоид, не являющийся ромбом. Сколько элементов содержит группа самосовмещений дельтоида, не являющегося ромбом? Укажите несколько свойств дельтоида, вытекающих из наличия у него оси симметрии.

425. Сколько элементов содержит группа самосовмещений правильного пятиугольника?

426. Для каждой фигуры на рисунке 292 укажите, из скольких элементов состоит ее группа самосовмещений.

427. Сколько элементов содержит группа самосовмещений:

а) круга; б) пары точек; в) прямоугольника?

428. Сколько элементов содержит группа самосовмещений правильного шестиугольника?

59. ГОМОТЕТИЯ

Пусть $\vec{a}$ — отличный от нуля вектор и k — отличное от нуля число. Через $k\vec{a}$ обозначается вектор, который определяется следующими двумя условиями:

- 1) длина вектора $k\vec{a}$ равна $|k| \cdot |\vec{a}|$;
- 2) вектор $k\vec{a}$ параллелен вектору $\vec{a}$, причем его направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$ при $k > 0$ и противоположно ему при $k < 0$.

На рисунке 293 $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = 0,75\vec{a}$, $\overrightarrow{PQ} = -2\vec{a}$, $\overrightarrow{OM} = -\frac{4}{3}\vec{a}$.

Наконец, условимся считать, что $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ для любого вектора $\vec{a}$ и, кроме того, $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$ для любого числа k .

Этим соглашениями произведение $k\vec{a}$ определено для любого вектора $\vec{a}$ и любого числа k . Отметим следующие частные случаи:

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}; \quad (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}.$$

Пусть O — произвольная точка плоскости и k — отличное от нуля число. Определим отображение плоскости на себя, считая, что каждая точка A переходит в точку A_1 , для которой $\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OA}$. Это отображение называется *гомотетией*. Точка O называется *центром гомотетии*, а число k — *коэффициентом гомотетии*.

Рассмотрим для примера гомотетию с центром O и коэффициентом $k=2$ (рис. 294). При этой гомотетии каждая отличная от O точка A переходит в точку A_1 луча OA , расположенную на расстоянии, вдвое большем от O , чем точка A . Можно сказать, что вся плоскость «растягивается» вдвое во всех направлениях от точки O и только точка O остается неподвижной. На рисунке 294 изображены точки A, B, C и фигуры F, H , а также точки A_1, B_1, C_1 и фигуры F_1, H_1 , получающиеся в результате гомотетии.

Если k — положительное число, меньшее единицы, то гомотетия означает «сжатие» плоскости (рис. 295).

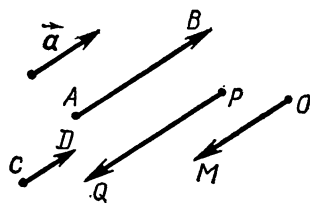


Рис. 293

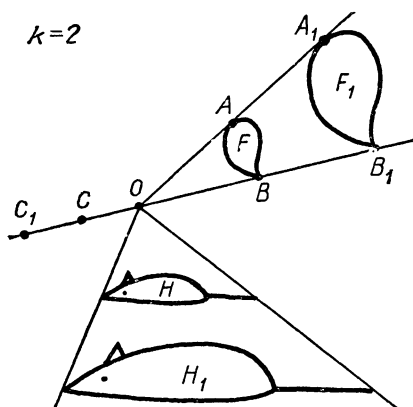


Рис. 294

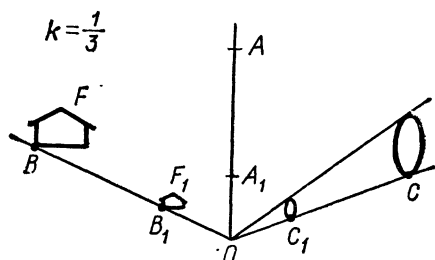


Рис. 295

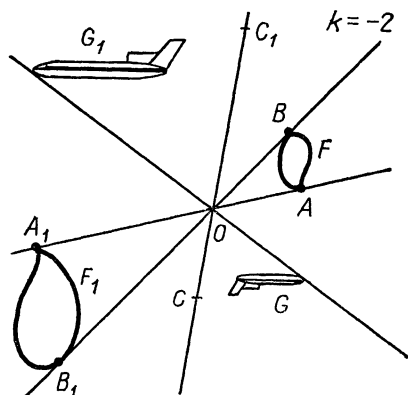


Рис. 296

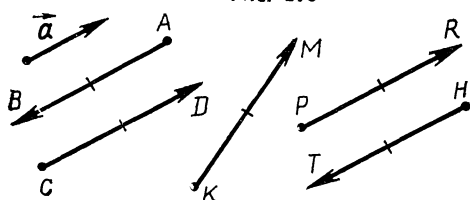


Рис. 297

При отрицательном k точка A (отличная от O) и точка A_1 , в которую она переходит при гомотетии, расположены на прямой OA по разные стороны от точки O (рис. 296).

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

а) Укажите на рисунке 297 векторы, равные $2\vec{a}$; векторы, равные $-2\vec{a}$.

б) Какие из следующих высказываний истинны:

- 1) $(-1) \vec{AB} = \vec{BA}$;
- 2) $(-1) \vec{AB} = -\vec{AB}$;
- 3) $(-1) \vec{AB} = -\vec{BA}$;
- 4) $1 \cdot \vec{AB} = \vec{BA}$;
- 5) $1 \cdot \vec{AB} = \vec{AB}$;
- 6) $(-1) \vec{AB} = \vec{AB}$?

в) Даны точка O и вектор $\vec{a}$. Что представляет собой множество точек $l = \{M: \vec{OM} = k\vec{a}, \text{ где } k \text{ — произвольное число}\}$?

г) Справедливо ли соотношение $\vec{AC} = k\vec{AB}$ (рис. 298)? Что можно сказать о числе k ?

д) Что представляет собой гомотетия с центром O и коэффициентом $k = -1$? Является ли движением гомотетия с центром O и коэффициентом k при $|k| \neq 1$?

е) На рисунке 294 фигура F_1 получена из F гомотетией с центром O и коэффициентом $k=2$. Можно ли получить фигуру F из F_1 при помощи некоторой гомотетии? С каким коэффициентом?

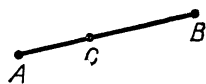


Рис. 298

ж) Является ли группой отображений плоскости множество всех гомотетий с данным центром? С данным центром и положительными коэффициентами гомотетии?

ЗАДАЧИ

429. Начертите вектор $\vec{a}$ и точки A, B, C, D и E . Постройте векторы $\vec{AH} = \frac{3}{2}\vec{a}$; $\vec{BK} = -3\vec{a}$; $\vec{CM} = -\frac{3}{4}\vec{a}$; $\vec{DN} = 1,5\vec{a}$; $\vec{EQ} = 0\vec{a}$.

430. Возьмите два непараллельных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте векторы $\vec{a} + 2\vec{b}$; $-2\vec{a} + 1,5\vec{b}$; $\frac{3}{2}\vec{a} - 0,75\vec{b}$; $-\vec{a} - \vec{b}$.

431. Точка P — центр параллелограмма $ABCD$. Выразите вектор $\vec{PC}$ через векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$.

432. При каком значении k справедливо равенство:

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = k(\vec{DE} + \vec{EA})?$$

433. Даны точка O и векторы $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, причем $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Что представляют собой следующие множества точек:

а) $B = \{M: \vec{OM} = k\vec{a}; k \geq 0\}$;

б) $C = \{M: \vec{OM} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b}; k_1, k_2 \text{ — произвольные числа}\}$;

в) $D = \{M: \vec{OM} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b}; k_1 \geq 0, k_2 \geq 0\}$;

г) $E = \{M: \vec{OM} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b}; k_1 \geq 0, k_2 \leq 0\}$?

434. Отметьте на чертеже точки O, A, B, C, D и E . Постройте точки, в которые они переходят при гомотетии с центром O и коэффициентом $k = \frac{3}{4}$.

435. Начертите фигуру F произвольной формы и отметьте вне ее точку O . Постройте по точкам фигуру F_1 , в которую переходит F при гомотетии с центром O и коэффициентом $k = 1,5$.

436. Докажите, что пересечение фигур сохраняется при гомотетии, т. е. если g — гомотетия, а F и H — какие-либо фигуры, то $g(F \cap H) = g(F) \cap g(H)$.

437. Возьмите два непараллельных вектора $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Постройте векторы $\vec{AM} = 2\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n}$; $\vec{BH} = \vec{m} - \vec{n}$; $\vec{CP} = -\vec{m} + 0\vec{n}$.

438. Отрезок BD — медиана треугольника ABC . Выразите вектор $\overrightarrow{BD}$:

а) через векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$;

б) через векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AC}$.

439. Возьмите на плоскости точки A, B, C, D и E . Примите точку A за центр гомотетии и постройте точки B_1, C_1, D_1 и E_1 , гомотетичные точкам B, C, D и E с коэффициентом $k = 1\frac{1}{4}$.

440. Отметьте две точки A и A_1 и постройте центр гомотетии с коэффициентом $k = 4$, которая переводит точку A в точку A_1 .

60. СВОЙСТВА ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Теорема. *Произведение вектора на число обладает следующими свойствами:*

а) $(\forall k, l, \vec{a}) (k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a})$;

б) $(\forall k, l, \vec{a}) ((k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a})$;

в) $(\forall k, \vec{a}, \vec{b}) (k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b})$.

Доказательство.

а) Будем предполагать, что $\vec{a} \neq \vec{0}$, $k \neq 0$, $l = 0$ (если хотя бы один из множителей равен нулю, то доказываемое соотношение очевидно). Нам нужно доказать, что векторы $k(l\vec{a})$ и $(kl)\vec{a}$ параллельны, имеют одинаковую длину и одинаково направлены.

Параллельность векторов очевидна: они оба параллельны вектору $\vec{a}$.

Легко проверить и равенство длин векторов: $|k(l\vec{a})| = |k| \cdot |l| \cdot |\vec{a}|$ и $|(kl)\vec{a}| = |k| \cdot |l| \cdot |\vec{a}|$.

Наконец, проверим, что эти векторы одинаково направлены. Если k и l — числа одного знака, то оба вектора $k(l\vec{a})$ и $(kl)\vec{a}$ направлены в ту же сторону, что и $\vec{a}$; если же k и l имеют разные знаки, то оба вектора направлены противоположно вектору $\vec{a}$.

Тем самым равенство $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$ доказано.

Свойства б) и в) выражают *дистрибутивность* (распределительность) произведения вектора на число.

Приведем доказательство второго из этих свойств. Отложим от некоторой точки O вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и от точки A вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$.

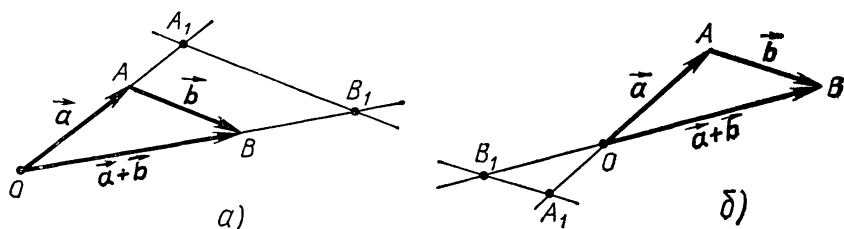


Рис. 299

Далее, отложим от точки O вектор

$$\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OA} = k\vec{a} \quad (1)$$

и проведем через точку A_1 прямую, параллельную (AB) (рис. 299, а, б). Точку, в которой проведенная прямая пересекает (OB) , обозначим через B_1 . Тогда в силу следствия (п. 38)

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|OB_1|}{|OB|} = \frac{|OA_1|}{|OA|} = |k|,$$

откуда

$$|A_1B_1| = |k| |AB| \text{ и } |OB_1| = |k| |OB|.$$

Направление векторов $\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OB}$ одинаково, если $k > 0$ (рис. 299, а), и противоположно, если $k < 0$ (рис. 299, б). Таким образом,

$$\overrightarrow{OB_1} = k\overrightarrow{OB} = k(\vec{a} + \vec{b}). \quad (2)$$

Аналогично

$$\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB} = k\vec{b}. \quad (3)$$

Теперь в силу соотношений (1), (2), (3) имеем:

$$k(\vec{a} + \vec{b}) = \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = k\vec{a} + k\vec{b}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

а) Известно, что $A \in [BC]$, причем $\frac{|BA|}{|BC|} = k$.

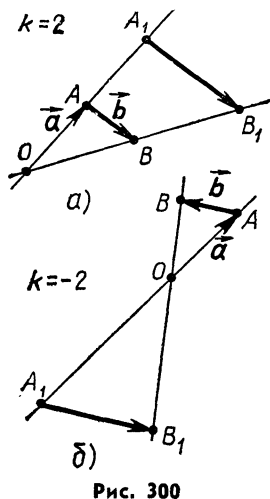
Какие из следующих соотношений справедливы:

1) $\overrightarrow{BA} = k\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BA}$; 3) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$?

б) Даны векторы: $(5+7)\vec{a}$; $5\vec{a}-7\vec{a}$; $-12\vec{a}$; $5\vec{a}+7\vec{a}$; $5\vec{a}-7\vec{a}$; $-5\vec{a}+7\vec{a}$; $(7-5)\vec{a}$; $-5\vec{a}-7\vec{a}$. Найдите среди них векторы:

1) имеющие с $\vec{a}$ одно и то же направление; 2) имеющие с $\vec{a}$ противоположное направление; 3) имеющие такую же длину, как и вектор $(5+7)\vec{a}$; 4) равные вектору $5\vec{a}+7\vec{a}$.

в) Решите уравнение $2(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{x}$. Укажите, какие свойства векторов использовались при решении.



441. Докажите, что $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = 3\vec{a}$. Укажите, какие свойства векторов при этом использовались.

442. Докажите соотношения:

а) $k(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = k\vec{a} + k\vec{b} + k\vec{c}$;

б) $k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$.

443. Найдите число x из уравнения $2(\vec{a} + \vec{b}) + x\vec{a} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$.

444. В параллелограмме найдите такую точку, чтобы сумма векторов, изображаемых направленными отрезками, идущими из этой точки к вершинам параллелограмма, была равна нулевому вектору. Докажите, что такая точка только одна.

445. Упростите выражения:

а) $2(\vec{AK} + \vec{BK}) + 3\vec{AK} + 2\vec{KB} - \vec{AK}$;

б) $3(\vec{a} - 2\vec{b}) - 2(\vec{b} - 3\vec{a}) - 3\vec{a}$.

446. Определите, чему равно k , если вектор $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ является корнем уравнения $3(\vec{x} + \vec{b}) - 2(3\vec{a} + \vec{x}) = k\vec{a}$, причем $\vec{a} \neq \vec{0}$.

447. Решите уравнение $2(\vec{x} + \vec{a}) = \frac{3}{2}\vec{x}$.

61. СВОЙСТВА ГОМОТЕТИИ

Теорема 1. Пусть A, B — две точки и A_1, B_1 — точки, в которые они переходят при гомотетии с центром O и коэффициентом k . Тогда $\vec{A_1B_1} = k\vec{AB}$.

Доказательство. Обозначим вектор $\vec{OA}$ через $\vec{a}$, вектор $\vec{AB}$ через $\vec{b}$ (рис. 300). Тогда $\vec{OA_1} = k\vec{OA} = k\vec{a}$, $\vec{OB_1} = k\vec{OB} = k(\vec{OA} + \vec{AB}) = k(\vec{a} + \vec{b})$. Поэтому

$$\vec{A_1B_1} = \vec{OB_1} - \vec{OA_1} = k(\vec{a} + \vec{b}) - k\vec{a} = k\vec{b} = k\vec{AB}.$$

Следствие. Отношение расстояний сохраняется при гомотетии, т. е. если точки A, B, C, D переходят при гомотетии в A_1, B_1, C_1, D_1 , то

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A_1B_1|}{|C_1D_1|}.$$

В самом деле,

$$\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}; \quad \overrightarrow{C_1D_1} = k\overrightarrow{CD},$$

и потому

$$|A_1B_1| = |k| \cdot |AB|; \quad |C_1D_1| = |k| \cdot |CD|,$$

откуда и вытекает требуемое равенство.

Из следствия вытекает, что при гомотетии все расстояния изменяются в одинаковое число раз. Так, на рисунке 301, а

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|} = \frac{|B_1D_1|}{|BD|} = \dots = |k|.$$

Изменение (увеличение или уменьшение) всех расстояний в одно и то же число раз при гомотетии выражают следующими словами: *гомотетия сохраняет форму фигур*. Иными словами, фигура F_1 , получающаяся из F при помощи гомотетии с центром O и коэффициентом k , представляет собой уменьшенную «копию» фигуры F при $|k| < 1$ (рис. 301, а) и увеличенную ее «копию» при $|k| > 1$ (рис. 301, б).

Из сказанного следует, что при гомотетии отрезок переходит в параллельный ему отрезок, прямая — в параллельную прямую. Каждый угол переходит при гомотетии в конгруэнтный ему угол. Так, на рисунке 301, а $\angle ABC \cong \angle A_1B_1C_1$, $\angle CDB \cong \angle C_1D_1B_1$ и т. д.

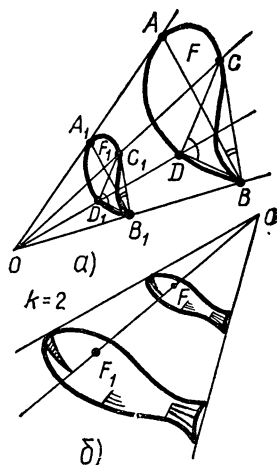


Рис. 301

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Докажите, что при гомотетии окружность переходит в окружность.
- Докажите, что при гомотетии: 1) медиана треугольника переходит в медиану гомотетичного треугольника; 2) биссектриса треугольника переходит в биссектрису гомотетичного треугольника; 3) высота треугольника переходит в высоту гомотетичного треугольника.
- Докажите, что касательная к окружности l переходит при гомотетии в касательную к окружности l' , в которую переходит окружность l .
- Верно ли высказывание: «для любых параллельных векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ существует гомотетия, которая переводит вектор $\overrightarrow{AB}$ в $\overrightarrow{CD}$ »?
- Докажите, что при гомотетии квадрат переходит в квадрат.

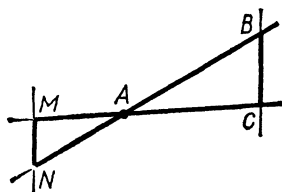


Рис. 302

448. Начертите четырехугольник $ABCD$ и возьмите внутри его точку O . Выполните гомотетию этого четырехугольника с центром O и коэффициентом $k = \frac{1}{2}$.

449. На рисунке 302 $(MN) \parallel (BC)$. Докажите, что $\triangle MAN$ получается из $\triangle BCA$ гомотетией с центром A . Определите приближенно коэффициент гомотетии.
450. Докажите, что отношение периметров гомотетичных многоугольников равно модулю коэффициента гомотетии.
451. При гомотетии f треугольник ABC с высотой $h_a = 3,8$ перешел в треугольник $A'B'C'$ с высотой $h'_a = 5,7$. Определите длины сторон CB и AC треугольника ABC , если $|C'B'| = 8,1$, $|A'C'| = 6,3$.
452. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O , причем $|OA| = 3,6$, $|OC| = 4,5$, $|DO| = 2,4$, $|OB| = 3$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция.
453. Пусть O — точка пересечения прямых, на которых лежат боковые стороны трапеции $ABCD$, T — середина основания $[AB]$, P — середина основания $[DC]$, K — точка пересечения диагоналей. Докажите: 1) что точки O , T и P лежат на одной прямой; 2) что точки K , T и P лежат на одной прямой.
454. Высота трапеции равна 15 см, длины ее оснований 12 см и 18 см. Определите расстояния от точки пересечения диагоналей до ее оснований.
455. Возьмите окружность l . Постройте окружность l' , гомотетичную окружности l с коэффициентом гомотетии $k = -1,5$, при трех различных положениях центра гомотетии O :
- O совпадает с центром окружности l ;
 - O лежит вне окружности l ;
 - $O \in l$.
456. В треугольнике ABC длина стороны BC равна 6 см; в треугольнике $A'B'C'$, гомотетичном треугольнику ABC , длина стороны $B'C'$ равна 7,8 см. Определите высоту h_a треугольника ABC , если $h'_a = 4,8$ см.
457. В трапеции длины верхнего и нижнего оснований равны 36 см и 27 см. Через точку пересечения диагоналей проведен отрезок PK , параллельный основаниям трапеции, концы которого принадлежат боковым сторонам. Определите длину отрезка PK .
458. В один из двух вертикальных углов вписана окружность радиуса 1,2 см, в другой — окружность радиуса 3 см. Определите расстояния от центров окружностей до общей вершины углов, если расстояние между центрами равно 12 см.

62. ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

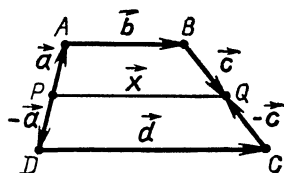


Рис. 303

С помощью векторов можно решать многие геометрические задачи. Для этого необходимо прежде всего перевести формулировку задачи на векторный язык, т. е. на некоторых из встречающихся в задаче отрезков выбрать то или иное направление. Иногда для сокращения записей получающиеся векторы полезно обозначить малыми буквами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и т. д. После этого составляют векторные равенства и преобразуют их, пользуясь правилами действий над векторами. После завершения алгебраических действий с векторами получающийся ответ снова нужно перевести на геометрический язык. В качестве примера рассмотрим решение следующей задачи.

Задача. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки P и Q — середины противоположных сторон AD и BC . Доказать, что если $|PQ| = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$, то $ABCD$ — трапеция.

Отрезок PQ , соединяющий середины противоположных сторон четырехугольника, называют *средней линией*. Если $(AB) \parallel (CD)$ (т. е. $ABCD$ — трапеция), то $|PQ| = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$. При решении этой задачи требуется доказать обратную теорему.

Решение. Обозначим вектор $\vec{PQ}$ через $\vec{x}$ и выберем такие направления звеньев ломаной $PABQ$, чтобы вектор $\vec{x}$ был равен сумме получающихся векторов. На рисунке 303 векторы $\vec{PA}$, $\vec{AB}$, $\vec{BQ}$ обозначены через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Так же мы поступим с ломаной $PDCQ$. Заметим, что $\vec{PD} = -\vec{PA} = -\vec{a}$ (так как P — середина стороны AD) и $\vec{CQ} = -\vec{BQ} = -\vec{c}$; вектор $\vec{DC}$ обозначен через $\vec{d}$. Этим введены векторы, позволяющие перевести условие задачи на векторный язык.

Мы имеем:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{x}; \quad (1)$$

$$(-\vec{a}) + \vec{d} + (-\vec{c}) = \vec{x}. \quad (2)$$

Кроме того, по условию задачи

$$\frac{|\vec{b}| + |\vec{d}|}{2} = |\vec{x}|. \quad (3)$$

Этим осуществлен перевод задачи на векторный язык.



Рис. 304

Перейдем теперь к алгебраическим вычислениям с векторами. Складывая равенства (1) и (2), получаем:

$$\vec{b} + \vec{d} = 2\vec{x}. \quad (4)$$

Из равенств (3) и (4) получаем:

$$|\vec{b} + \vec{d}| = |2\vec{x}| = 2|\vec{x}| = |\vec{b}| + |\vec{d}|. \quad (5)$$

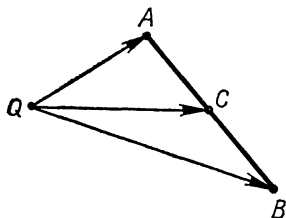


Рис. 305

Теперь переведем полученное равенство (5) на геометрический язык. Отложим от произвольной точки O вектор $\vec{OM} = \vec{b}$ и от точки M вектор $\vec{MN} = \vec{d}$. Тогда $\vec{ON} = \vec{b} + \vec{d}$ (рис. 304). Равенство (5) показывает, что $|ON| = |OM| + |MN|$.

Следовательно, $M \in [ON]$, и потому $\vec{b} \parallel \vec{d}$. Но это означает, что $(AB) \parallel (CD)$, т. е. $ABCD$ — трапеция.

При решении задач с помощью векторов часто оказывается полезной следующая теорема.

Теорема. Если C — середина отрезка AB , то для любой точки Q справедливо соотношение

$$\vec{QC} = \frac{1}{2} \vec{QA} + \frac{1}{2} \vec{QB}.$$

Доказательство. Применяя правило трех точек, выразим вектор $\vec{QC}$ (рис. 305) через векторы $\vec{QA}$ и $\vec{AC}$ и выполним необходимые преобразования: $\vec{QC} = \vec{QA} + \vec{AC} = \vec{QA} + \frac{1}{2} \vec{AB} = \vec{QA} + \frac{1}{2} (\vec{AQ} + \vec{QB}) = \vec{QA} + \frac{1}{2} (-\vec{QA} + \vec{QB}) = \frac{1}{2} \vec{QA} + \frac{1}{2} \vec{QB}$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Точки M и N — середины сторон AB и BC треугольника ABC (рис. 306). Докажите с помощью векторов свойство средней линии треугольника:

$$(MN) \parallel (AC) \quad \text{и} \quad |MN| = \frac{1}{2} |AC|.$$

Введите для этого следующие векторы: $\vec{MB} = \vec{p}$ и $\vec{BN} = \vec{q}$.

- б) Точки M и N (рис. 307) — середины сторон треугольника.

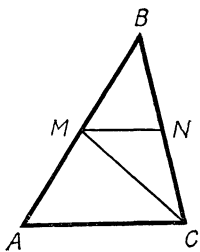


Рис. 307

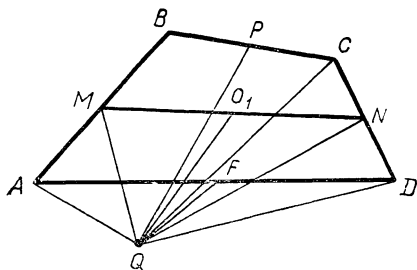


Рис. 308

Какие из следующих равенств истинны:

1) $\vec{CM} = \frac{1}{2} \vec{CA} + \frac{1}{2} \vec{CB}$; 2) $\vec{MN} = \frac{1}{2} \vec{MB} + \frac{1}{2} \vec{MC}$;

3) $\vec{NM} = \frac{1}{2} \vec{NB} + \frac{1}{2} \vec{CA}$; 4) $\vec{MN} = \frac{1}{2} \vec{CA}$?

в) Точки M и N — середины сторон четырехугольника $ABCD$ (рис. 308); точка O_1 — середина средней линии MN .

1) Убедитесь в справедливости следующих соотношений:

$$\vec{QM} = \frac{1}{2} \vec{QA} + \frac{1}{2} \vec{QB}; \quad \vec{QN} = \frac{1}{2} \vec{QC} + \frac{1}{2} \vec{QD};$$

$$\vec{QO_1} = \frac{1}{4} \vec{QA} + \frac{1}{4} \vec{QB} + \frac{1}{4} \vec{QC} + \frac{1}{4} \vec{QD}.$$

2) Убедитесь, что если O_2 — середина средней линии PF (рис. 308), то $\vec{QO_2} = \frac{1}{4} \vec{QA} + \frac{1}{4} \vec{QB} + \frac{1}{4} \vec{QC} + \frac{1}{4} \vec{QD}$.

3) Как расположены относительно друг друга точки O_1 и O_2 ?

ЗАДАЧИ

459. Докажите с помощью векторов теорему о средней линии трапеции.

460. Докажите, что длина отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции, равна полуразности длин ее оснований.

461. Докажите, что в произвольном четырехугольнике отрезок, соединяющий середины диагоналей, проходит через точку пересечения средних линий и делится в этой точке пополам.

462. Известно, что $A \in [BC]$, причем $\frac{|BA|}{|BC|} = k$. Кроме того, выбрана некоторая точка O . Убедитесь, что

$$\vec{OA} = k\vec{OC} + (1-k)\vec{OB}.$$

463. В четырехугольнике $ABCD$ точки M и N — середины сторон AD и BC . Докажите, что $2|MN| \leq |AB| + |CD|$.

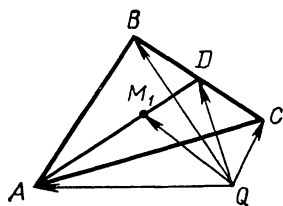


Рис. 309

464. Точки M и N — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Докажите, что середины диагоналей четырехугольников $AMND$ и $BMNC$ являются вершинами параллелограмма (или лежат на одной прямой).

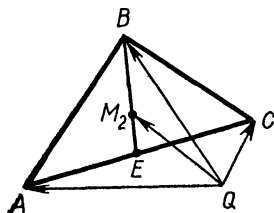


Рис. 310

63. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема. *Медианы произвольного треугольника ABC пересекаются в одной точке M , которая обладает следующими двумя свойствами:*

1) *расстояние от точки M до каждой вершины треугольника равно $\frac{2}{3}$ длины соответствующей медианы;*

2) *для любой точки Q справедливо соотношение*

$$\vec{QM} = \frac{1}{3} \vec{QA} + \frac{1}{3} \vec{QB} + \frac{1}{3} \vec{QC}.$$

Доказательство. Обозначим через D середину стороны BC , а через M_1 такую точку отрезка AD , что $\frac{|AM_1|}{|AD|} = \frac{2}{3}$ (рис. 309). Тогда в силу теоремы предыдущего пункта имеем:

$$\begin{aligned} \vec{QD} &= \frac{1}{2} \vec{QB} + \frac{1}{2} \vec{QC}, \text{ и потому } \vec{QM}_1 = \vec{QA} + \vec{AM}_1 = \vec{QA} + \frac{2}{3} \vec{AD} = \\ &= \vec{QA} + \frac{2}{3} (\vec{AQ} + \vec{QD}) = \vec{QA} + \frac{2}{3} (-\vec{QA} + \vec{QD}) = \frac{1}{3} \vec{QA} + \frac{2}{3} \vec{QD} = \\ &= \frac{1}{3} \vec{QA} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \vec{QB} + \frac{1}{2} \vec{QC} \right) = \frac{1}{3} \vec{QA} + \frac{1}{3} \vec{QB} + \frac{1}{3} \vec{QC}. \end{aligned}$$

Итак, точка M_1 , лежащая на медиане AD и обладающая тем свойством, что $|AM_1|$ равно $\frac{2}{3}$ длины этой медианы, удовлетворяет равенству

$$\vec{QM}_1 = \frac{1}{3} \vec{QA} + \frac{1}{3} \vec{QB} + \frac{1}{3} \vec{QC}.$$

Проведя точно такие же рассуждения, убедимся, что точка M_2 , лежащая на медиане BE и обладающая тем свойством, что $|BM_2|$ равно $\frac{2}{3}$ длины этой медианы (рис. 310), удовлетворяет равенству

$$\vec{QM}_2 = \frac{1}{3} \vec{QA} + \frac{1}{3} \vec{QB} + \frac{1}{3} \vec{QC}.$$

Аналогичная точка M_3 , лежащая на медиане CF (рис. 311), удовлетворяет равенству

$$\overrightarrow{QM_3} = \frac{1}{3} \overrightarrow{QA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{QB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{QC}.$$

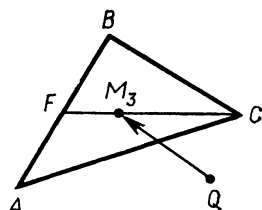


Рис. 311

Мы видим, что $\overrightarrow{QM_1} = \overrightarrow{QM_2} = \overrightarrow{QM_3}$, т. е. M_1 , M_2 и M_3 — одна и та же точка M . Итак, все три медианы AD , BE и CF проходят через одну и ту же точку M . Из доказательства видно, что эта точка M обладает свойствами 1) и 2).

Точка пересечения медиан треугольника называется центром тяжести этого треугольника.

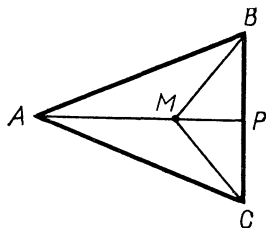


Рис. 312

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Точка M — центр тяжести треугольника ABC (рис. 312).

Убедитесь в справедливости следующего равенств:

1) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC};$

2) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$

- б) Точки M и N — центры тяжести треугольников ABC и DBC (рис. 313); Q — произвольная точка плоскости. Убедитесь, что

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{QD} - \frac{1}{3} \overrightarrow{QA} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}.$$

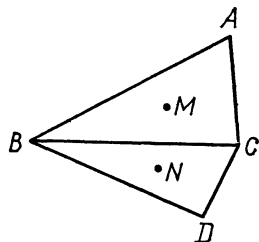


Рис. 313

Как связаны между собой длины отрезков MN и AD ?

- в) Точки M , N и P — середины сторон треугольника ABC , O — центр тяжести треугольника ABC (рис. 314). Убедитесь, что гомотетия с центром O и коэффициентом $k = -\frac{1}{2}$ переводит треугольник ABC в треугольник MNP .

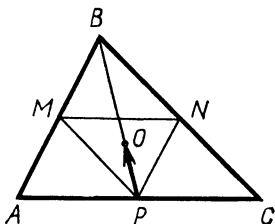


Рис. 314

ЗАДАЧИ

465. Докажите, что для треугольников ABC и MNP (рис. 314) точка O является их общим центром тяжести.

466. Построен произвольный треугольник ABC и проведены его медианы AK , BM и CF . Докажите, что существует треугольник, у которого длины сторон равны $|AK|$, $|BM|$, $|CF|$, а стороны параллельны медианам исходного треугольника.
467. Дан треугольник ABC . Докажите, что точка M в том и только том случае является центром тяжести этого треугольника, если $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$.
468. Отрезок CD не пересекает прямую AB ; M — середина отрезка CD . Докажите, что центры тяжести треугольников ABC , ABM и ABD лежат на одной прямой.
469. Отрезок AB параллелен прямой l . Найдите множество центров тяжести всех треугольников ABC , для которых $C \in l$.

470. В треугольнике ABC проведены медианы AD , BE и CF . Найдите сумму векторов $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF}$.
471. На стороне AC треугольника ABC взята точка D . Докажите, что центры тяжести треугольников ABC , ABD и BCD лежат на одной прямой.
472. Точка M — центр тяжести треугольника ABC . Докажите, что треугольники ABM , BCM и ACM имеют одинаковую площадь.

64. ОТОБРАЖЕНИЯ, СОХРАНЯЮЩИЕ И МЕНЯЮЩИЕ ОРИЕНТАЦИЮ

На рисунке 315 изображен многоугольник F , на контуре которого указано направление обхода против часовой стрелки (или, как принято говорить в математике, *положительное* направление обхода). При параллельном переносе многоугольник F переходит в F_1 . При этом получается направление обхода контура многоугольника F_1 также в *положительном* направлении (против часовой стрелки).

На рисунке 316 изображены многоугольник H с *отрицательным* направлением обхода и многоугольник H_1 , в который пе-

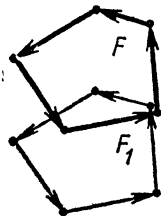


Рис. 315

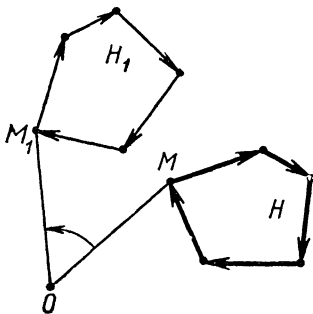


Рис. 316

реходит H при повороте. Получающееся при этом повороте направление обхода контура многоугольника H_1 также *отрицательное*, т. е. поворот *сохраняет* направление обхода.

Напротив, осевая симметрия *меняет* направление обхода на противоположное (рис. 317).

Итак, *параллельный перенос и поворот (в частности, центральная симметрия) сохраняют направление обхода на контурах фигур*, или, как говорят для краткости, *сохраняют ориентацию*. Осевая симметрия *меняет ориентацию*.

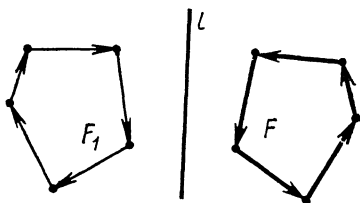


Рис. 317

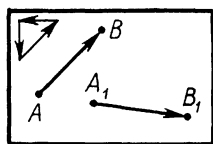


Рис. 318

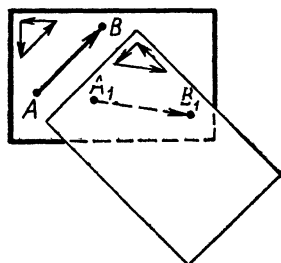


Рис. 319

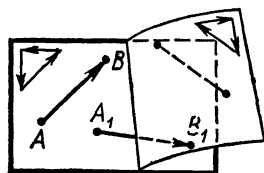


Рис. 320

Проведем эксперимент, поясняющий смысл этой теоремы (доказательство ее в школьном курсе не рассматривается).

Наложим на рисунок 318 лист прозрачного материала (например, кальки или полиэтилена) и отметим на нем положение точек A и B . Легко убедиться, передвигая прозрачный лист в плоскости чертежа, что существует только одно положение прозрачного листа, при котором имеющиеся на нем точки совпадут соответственно с A_1 и B_1 (рис. 319). Можно поступить и иначе: сначала перевернуть прозрачный лист на обратную сторону (рис. 320), а затем совместить имеющиеся на нем точки A и B соответственно с точками A_1 и B_1 (рис. 321). Заметим,

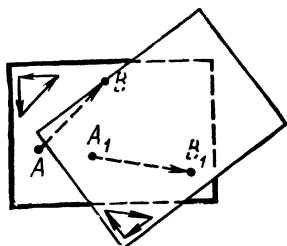


Рис. 321

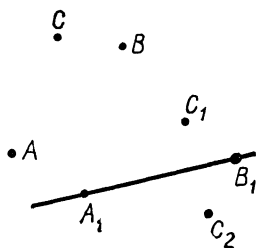


Рис. 322

что первое из этих движений (рис. 319) сохраняет ориентацию плоскости, а второе (рис. 321)—меняет ее.

Замечание. Выше отмечалось, что параллельный перенос, а также поворот являются движениями, сохраняющими ориентацию. Справедлива также и обратная теорема: *всякое сохраняющее ориентацию движение плоскости является либо параллельным переносом, либо поворотом*. Эту теорему (доказательство которой мы не рассматриваем) впервые установил в конце прошлого столетия французский механик и геометр Шаль.

Отметим еще (также без доказательства), что всякое движение, меняющее ориентацию, является либо осевой симметрией, либо так называемой *скользящей симметрией*, т. е. движением, которое представляется в виде $t \circ s$, где s —симметрия относительно некоторой прямой l , а t —параллельный перенос, вектор которого параллелен l .

Задача. Пусть A, B и C —три точки, не лежащие на одной прямой, и A_1, B_1, C_1 —такие три точки, что $|A_1B_1| = |AB|$, $|A_1C_1| = |AC|$, $|B_1C_1| = |BC|$. Доказать, что существует единственное движение f , при котором точки A, B и C переходят соответственно в точки A_1, B_1, C_1 .

Решение. Обозначим через C_2 точку, симметричную точке C_1 относительно прямой A_1B_1 (рис. 322). Искомое движение должно переводить A, B в A_1, B_1 . Таких движений существует ровно два (одно из них сохраняет ориентацию, другое меняет ее). Каждое из этих двух движений переводит точку C в такую точку C' , что $|AC| = |A_1C'|$, $|BC| = |B_1C'|$, т. е. C' совпадает либо с точкой C_1 , либо с точкой C_2 . Таким образом, одно из рассмотренных движений переводит $\triangle ABC$ в $\triangle A_1B_1C_1$ (это и будет искомым движением), а другое переводит $\triangle ABC$ в $\triangle A_1B_1C_2$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Известно, что $|AB| = |A_1B_1|$, $\hat{A} = \hat{A}_1$, $\hat{B} = \hat{B}_1$. Существует ли движение, переводящее $\triangle ABC$ в $\triangle A_1B_1C_1$?
- Известно, что $|AB| = |A_1B_1|$, $|AC| = |A_1C_1|$, $\hat{A} = \hat{A}_1$. Конгруэнтны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$?
- Какие из следующих высказываний истинны: 1) если каждое из двух движений сохраняет ориентацию, то и их ком-

позиция сохраняет ориентацию; 2) если каждое из двух движений меняет ориентацию, то их композиция сохраняет ориентацию; 3) существуют две осевые симметрии, композиция которых тоже является осевой симметрией; 4) множество всех сохраняющих ориентацию движений является группой отображений плоскости; 5) множество всех меняющих ориентацию движений является группой отображений плоскости?

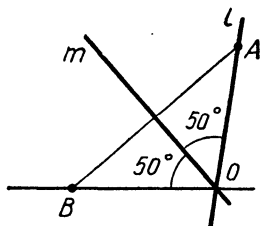


Рис. 323

- г) Обозначим через f симметрию относительно прямой l (рис. 323), через g —симметрию относительно прямой m , через B —точку, в которую переходит точка A при симметрии относительно прямой m . Убедитесь в истинности следующих высказываний: 1) композиция $g \circ f$ переводит O, A в O, B ; 2) композиция $g \circ f$ сохраняет ориентацию; 3) поворот на угол 100° вокруг точки O сохраняет ориентацию и переводит O, A в O, B ; 4) композиция $g \circ f$ представляет собой поворот на 100° вокруг точки O .

ЗАДАЧИ

473. На контуре треугольника T_1 указано некоторое направление обхода. Треугольник T_2 получен из T_1 параллельным переносом; треугольники T_3 и T_4 получены из T_1 и T_2 с помощью симметрии относительно прямой l . Сделайте чертеж. Какие из следующих высказываний истинны:
 а) направления обхода треугольников T_1 и T_2 противоположны;
 б) направления обхода треугольников T_1 и T_3 противоположны;
 в) направления обхода треугольников T_1 и T_4 противоположны?
474. Отметьте на плоскости две различные точки M и N . Какие из следующих условий необходимы и какие достаточны для того, чтобы движение h было тождественным отображением:
 а) $h(M) = M$ и $h(N) = N$;
 б) движение h сохраняет ориентацию и $h(M) = M$;
 в) движение h меняет ориентацию и $h(M) = M, h(N) = N$;
 г) движение h сохраняет ориентацию и $h(M) = M, h(N) = N$?
475. Начертите пятиугольник $ABCDE$. Отметьте такие точки A_1 и B_1 , что $|AB| = |A_1B_1|$ и $(AB) \nparallel (A_1B_1)$. Постройте с помощью циркуля и линейки пятиугольник, в который переходит $ABCDE$ при движении, сохраняющем ориентацию и переводящем A, B в A_1, B_1 .

476. Даны прямые a, b и точки $A \in a$ и $B \in b$. Сколько существует движений, переводящих прямую a в b , а точку A в точку B ?
477. Через s_1 и s_2 обозначены симметрии относительно двух перпендикулярных прямых. Что представляет собой движение $s_1 \circ s_2$? Совпадает ли оно с $s_2 \circ s_1$?
478. Докажите, что если меняющее ориентацию движение имеет хотя бы одну неподвижную точку, то оно представляет собой осевую симметрию.
-
479. Начертите на листе бумаги линию k произвольной формы и отметьте на ней какие-либо точки A, B, C, D, E и F . Отметьте на этом листе две такие точки A_1 и B_1 , что $|AB| = |A_1B_1|$, причем $(AB) \nparallel (A_1B_1)$. Постройте с помощью циркуля точки, в которые переходят C, D, E и F при движении, сохраняющем ориентацию и переводящем A, B в A_1, B_1 . Начертите от руки линию k_1 , в которую переходит k при этом движении.
480. Что представляет собой композиция двух осевых симметрий относительно параллельных прямых l и m ?
481. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что если $|AB| = |A_1B_1|$, $|AD| = |A_1D_1|$ и $\hat{A} = \hat{A}_1$, то эти параллелограммы конгруэнтны.

65. ПОДОБИЕ

На рисунке 324 изображены два различных плана одного и того же участка местности, выполненные в разных масштабах.

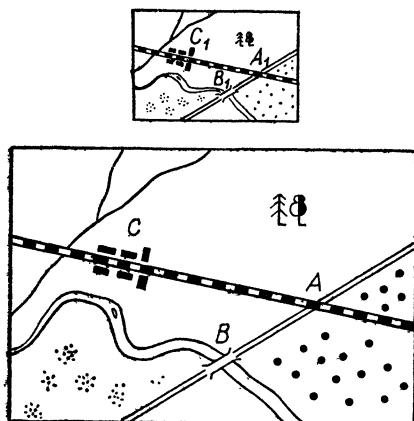


Рис. 324

Отношение расстояний $\frac{|A_1B_1|}{|AB|}$ равно отношению масштабов (в данном случае оно равно 0,4). Каждое из отношений $\frac{|A_1C_1|}{|AC|}$, $\frac{|B_1C_1|}{|BC|}$ и т. д. также равно 0,4. Таким образом, переход от одного плана к другому представляет собой отображение, при котором отношение расстояний между соответствующими парами точек одинаково:

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|} = \dots = 0,4.$$

Отображение f называется *подобием с коэффициентом* $k > 0$, если для любых точек A и B справедливо соотношение

$$\frac{|f(A)f(B)|}{|AB|} = k.$$

Иными словами, если $A, B, C, D, \dots$ — некоторые точки плоскости, а $A_1, B_1, C_1, D_1, \dots$ — точки, в которые они переходят в результате подобия, то

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|} = \frac{|A_1D_1|}{|AD|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|} = \dots = k.$$

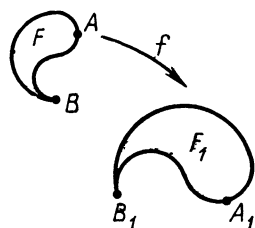


Рис. 325

Это показывает, что всякое подобие (как и гомотетия) сохраняет форму фигур.

Если существует подобие f , переводящее фигуру F в F_1 , то фигуры F и F_1 называются *подобными*. Подобие фигур F и F_1 обозначается записью $F \sim F_1$. На рисунке 325 изображены две подобные фигуры.

Всякая гомотетия является подобием. Действительно, если f — гомотетия с центром O и коэффициентом k , то для любых точек A, B и точек $A_1 = f(A)$, $B_1 = f(B)$ имеет место равенство

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = |k|.$$

Это значит, что f есть подобие с коэффициентом подобия $|k|$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Какие из следующих высказываний истинны: 1) всякое движение является подобием с коэффициентом 1; 2) всякое подобие с коэффициентом 1 является движением; 3) если h — подобие с коэффициентом $k \neq 1$, то существует фигура H , для которой H и $h(H)$ не конгруэнтны?
- Пусть f и g — подобия соответственно с коэффициентами k и m . Будут ли подобиями следующие отображения: 1) $g \circ f$; 2) $f \circ g$; 3) f^{-1} ? Если эти отображения являются подобиями, укажите их коэффициенты.
- Является ли множество всех подобий группой отображений плоскости?
- Является ли подобие фигур отношением эквивалентности?
- Подобие f с коэффициентом k переводит фигуру F в фигуру F_1 . Подобие g с коэффициентом m переводит фигуру F_1 в фигуру F_2 . Какие из следующих высказываний истинны: 1) для любых k и m фигуры F и F_2 конгруэнтны; 2) для любых k и m фигуры F и F_2 подобны; 3) существуют k и m , при которых фигуры F и F_2 конгруэнтны?

482. Фигуры F и F_1 на рисунке 326 подобны.
- а) Определите коэффициент подобия, при котором фигура F переходит в фигуру F_1 .
- б) В какую из обозначенных на чертеже точек переходит точка C при этом подобии?
483. Даны точки $A(1; 5)$, $B(5; 5)$, $C(3; 3)$, $A_1(0; 4)$ и $B_1(0; 1)$. В какую точку перейдет точка C в результате подобия, переводящего точки A и B соответственно в точки A_1 и B_1 ? Сколько можно найти таких точек?
484. Точки C и D симметричны относительно прямой AB . Докажите, что если f —подобие, то точки $f(C)$ и $f(D)$ симметричны относительно прямой, проходящей через точки $f(A)$ и $f(B)$.
485. Фигура F —круг радиуса r с центром O . Подобие h с коэффициентом k переводит точку O в точку O_1 . В какую фигуру перейдет F в результате подобия h ?
486. Подобие h переводит точки A, B в точки A_1, B_1 . Какие из преобразований h^{-1} , $h \circ h$, $h \circ h^{-1}$ являются подобиями? Определите коэффициенты этих подобий, если $|AB|=8$ см, а $|A_1B_1|=12$ см.
487. Точки A, B и C не лежат на одной прямой. Могут ли они в результате подобия перейти в три точки, лежащие на одной прямой?
-
488. Расстояние между городами A и B равно 120 км. Найдите расстояние между городами C и B , пользуясь планом местности (рис. 327).
489. Подобие g с коэффициентом $\frac{2}{3}$ переводит точки A и B в точки A_1 и B_1 , а подобие h с коэффициентом $\frac{1}{5}$ переводит точки A_1 и B_1 в точки A_2 и B_2 . Определите $|AB|$ и $|A_2B_2|$, если известно, что $|A_1B_1|=30$. Определите отношение $\frac{|A_2B_2|}{|AB|}$.

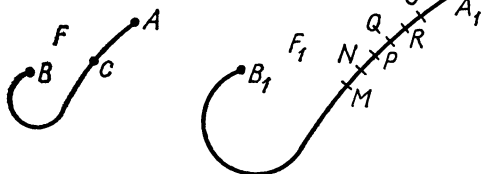


Рис. 326

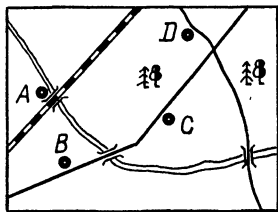


Рис. 327

490. Начертите прямую l , точку O и треугольник F . Постройте треугольник F_1 , симметричный треугольнику F относительно прямой l . Постройте после этого треугольник F_2 , гомотетичный треугольнику F_1 с центром O и коэффициентом 0,5. Докажите, что треугольники F и F_2 подобны.

66. ПОДОБИЕ КАК КОМПОЗИЦИЯ ГОМОТЕТИИ И ДВИЖЕНИЯ

Теорема. *Всякое подобие можно представить в виде композиции гомотетии и движения.*

Доказательство. Пусть h — подобие с коэффициентом k . Возьмем какую-нибудь гомотетию g с тем же коэффициентом k . Отображение g^{-1} является подобием с коэффициентом $\frac{1}{k}$, и потому $h \circ g^{-1}$ — подобие с коэффициентом $\frac{1}{k} \cdot k = 1$. Следовательно, композиция $h \circ g^{-1}$ является движением.

Обозначим это движение через f , т. е. $f = h \circ g^{-1}$. Тогда $h = f \circ g$ (действительно, $f \circ g = (h \circ g^{-1}) \circ g = h \circ (g^{-1} \circ g) = h \circ e = h$). Тем самым подобие h удалось представить в виде композиции гомотетии g и движения f .

Представление подобия h в виде композиции гомотетии и движения не единственно. Это видно из доказательства теоремы: мы могли взять в качестве g гомотетию с коэффициентом k и любым центром O .

Из доказанной теоремы вытекает ряд важных свойств подобия. Например, *при подобии отрезок переходит в отрезок, прямая — в прямую*. В самом деле, пусть $h = f \circ g$ — подобие (где f — движение, а g — гомотетия). При гомотетии g отрезок переходит в отрезок; при движении f отрезок также переходит в отрезок. Следовательно, и подобие h переводит каждый отрезок в отрезок.

Аналогично устанавливается, что прямая при подобии переходит в прямую.

Из того, что $h = f \circ g$, вытекает также (в силу свойств движения и гомотетии), что при всяком подобии две параллельные между собой прямые переходят в две прямые, также параллельные между собой (рис. 328).

Задача. Доказать, что если $\hat{A} = \hat{A}_1$ и $\hat{B} = \hat{B}_1$ (рис. 329), то треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$.

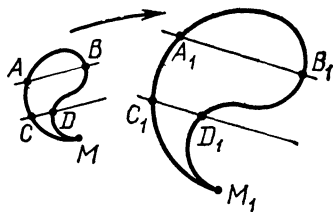


Рис. 328

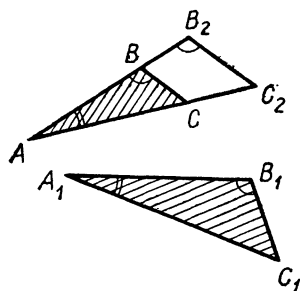


Рис. 329

Решение. Обозначим через g гомотетию с центром A и коэффициентом $k = \frac{|A_1B_1|}{|AB|}$. При этой гомотетии треугольник ABC перейдет в новый треугольник AB_2C_2 , причем $|AB_2| = k|AB| = |A_1B_1|$. Кроме того, $\hat{A} = \hat{A}_1$, $\hat{B}_2 = \hat{B} = \hat{B}_1$. Таким образом, треугольники AB_2C_2 и $A_1B_1C_1$ имеют конгруэнтные стороны AB_2 и A_1B_1 и соответственно конгруэнтные углы: $\hat{A} = \hat{A}_1$, $\hat{B}_2 = \hat{B}_1$. Следовательно, существует движение f , которое переводит треугольник AB_2C_2 в треугольник $A_1B_1C_1$. Композиция $f \circ g$ сразу переводит треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$. Так как каждое из отображений g и f является подобием, то и $f \circ g$ — подобие.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Какие из следующих высказываний истинны: 1) подобие переводит любой квадрат в квадрат; 2) подобие переводит любой ромб в квадрат; 3) подобие переводит любой равносторонний треугольник в равносторонний треугольник?
- Какие из следующих высказываний истинны: 1) любые два квадрата конгруэнтны; 2) любые два квадрата гомотетичны; 3) любые два квадрата подобны; 4) любые две окружности конгруэнтны; 5) любые две окружности гомотетичны; 6) любые две окружности подобны?
- Докажите, что подобие сохраняет конгруэнтность углов, т. е. если F — произвольный угол и h — подобие, то $F \cong h(F)$.

ЗАДАЧИ

- Треугольники ABC и MNH подобны, $\angle C \cong \angle H$. Биссектриса угла C в треугольнике ABC имеет длину 6 см. Определите длину биссектрисы угла H , если соответственные медианы BD и PT этих треугольников имеют длины 4,8 см и 2,4 см.
- В треугольниках ABC и MNH $\angle C \cong \angle H$, $\angle A \cong \angle P$. Определите длину стороны BC , если $|AC| = |MN| = 24$ см и $|PH| = 6$ см.
- В параллелограмме $ABCD$ известны длины сторон: $|AB| = 6$ см и $|BC| = 10$ см. Постройте отрезок HP , концы которого принадлежат сторонам параллелограмма, так, чтобы параллелограмм $ABPH$ был подобен параллелограмму $ABCD$. Вычислите стороны построенного параллелограмма.

494. Из вершины B тупого угла параллелограмма $ABCD$ проведены высоты BH и BP . Определите длину высоты BH , если $|BP|=15$, $|BC|=21$, $|BA|=14$.
495. На одной стороне угла с вершиной O взяты точки A и B , а на другой — точки C и D , причем $|OA|=3$ см, $|OB|=4$ см, $|OC|=2$ см и $\widehat{OBD}=\widehat{OCA}$. Найдите длину отрезка OD .
496. На стороне $[AC]$ треугольника ABC взята такая точка D , что $\angle ABC \cong \angle BDC$. Определите $|BD|$, если $|AB|=12$, $|BC|=10$, $|AC|=11$.
497. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведена высота CH на гипотенузу. Известно, что $|CH|=8$, $|AH|=3$. Определите длину гипотенузы AB .
498. Докажите, что в подобных многоугольниках отношение их периметров равно коэффициенту подобия.
-
499. В двух треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $\angle A \cong \angle A_1$ и $\angle B \cong \angle B_1$, $|AB|=28$ см, $|A_1B_1|=20$ см. Найдите длины отрезков AC и A_1C_1 , зная, что их разность равна 10 см.
500. Большая сторона одного из подобных многоугольников имеет длину 8,1 см; большая сторона второго многоугольника имеет длину 2,7 см. Периметр первого многоугольника равен 53 см. Чему равен периметр второго многоугольника?
501. В треугольнике ABC с прямым углом C длина гипотенузы равна 13 см, а длина катета BC равна 10 см. Точка M , расположенная на гипотенузе, отстоит от вершины A на 7 см. Найдите расстояние от M до прямой AC .
502. В прямоугольном треугольнике гипотенуза имеет длину 9 см, а один из катетов 6 см. Определите длины отрезков, на которые делится гипотенуза высотой, проведенной из вершины прямого угла.

67. ОТНОШЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПОДОБНЫХ ФИГУР

Теорема. *Отношение площадей двух подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.*

Доказательство. Рассмотрим квадратную сетку (палетку) со стороной, равной единице измерения. При подобии h с коэффициентом k она перейдет в новую квадратную сетку, причем длина стороны каждого квадрата будет равна k ; следовательно, площадь каждого такого квадрата будет k^2 .

Если фигура F состояла из n квадратов первоначальной палетки и, следовательно, имела площадь $S(F)=n$, то фигура $F_1=h(F)$ будет содержать n квадратов второй палетки и, следовательно, будет иметь площадь $S(F_1)=n \cdot k^2$.

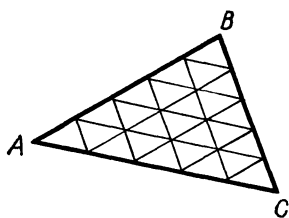


Рис. 330

Таким образом, в этом случае

$$\frac{S(F_1)}{S(F)} = \frac{nk^2}{n} = k^2. \quad (1)$$

Если же фигура F не составлена точно из нескольких квадратов первой палетки, то равенство (1) справедливо приближенно. Если мы возьмем более мелкую палетку (скажем, со стороной 0,1 единицы длины), то равенство (1) будет справедливо с той точностью, которую дает эта палетка.

Таким образом, мы убеждаемся, что $\frac{S(F_1)}{S(F)} \approx k^2$ с любой степенью точности. Следовательно, справедливо равенство

$$\frac{S(F_1)}{S(F)} = k^2.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Подобие h переводит точки A, B, C соответственно в точки A_1, B_1, C_1 . Определите $|AB|$, если:
 - $S(\triangle ABC) = 15 \text{ см}^2, S(\triangle A_1B_1C_1) = 60 \text{ см}^2, |A_1B_1| = 13 \text{ см};$
 - $S(\triangle ABC) = 10 \text{ см}^2, S(\triangle A_1B_1C_1) = 62,5 \text{ м}^2, |A_1B_1| = |AB| = 1 \text{ м}.$
- Каждая из сторон треугольника ABC разбита на n конгруэнтных частей. Через точки деления проведены отрезки, параллельные сторонам треугольника (рис. 330). На сколько конгруэнтных треугольников разбивается этими отрезками треугольник ABC ?
- Квадрат $A_1B_1C_1D_1$ получен из квадрата $ABCD$ в результате гомотетии с коэффициентом k . Во сколько раз площадь квадрата $A_1B_1C_1D_1$ больше площади квадрата $ABCD$?

ЗАДАЧИ

- Начертите треугольник ABC . Постройте подобный ему треугольник MTK , площадь которого в 6,25 раза больше площади треугольника ABC .
- Площадь участка земли на карте равна $90,35 \text{ см}^2$. Чему равна площадь участка на местности, если масштаб карты равен 1:100 000?
- В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведена высота CD . С помощью теоремы об отношении площадей подобных фигур докажите соотношение

$$\left(\frac{|AC|}{|BC|}\right)^2 = \frac{|AD|}{|BD|}.$$

506. В треугольнике ABC стороны AB и BC соответственно имеют длины 16 см и 6 см, а высота AH имеет длину 15 см. В подобном ему треугольнике MPO меньшая сторона имеет длину 4 см. Определите площадь треугольника MPO .

507. Коэффициент подобия двух многоугольников равен 0,75. Площадь одного из многоугольников больше площади другого на 45 см^2 . Определите площадь каждого из многоугольников.

508. Прямая делит параллелограмм, длины сторон которого равны a и $\frac{5}{2}a$, на два подобных параллелограмма. Найдите отношение площадей полученных параллелограммов.

68. ЛОГИЧЕСКИЕ СОЮЗЫ «И», «ИЛИ».

На рисунке 331 треугольник ABC одновременно обладает следующими двумя свойствами: во-первых, угол при вершине C прямой и, во-вторых, стороны AC и BC конгруэнтны.

В математике одновременное выполнение двух свойств принято называть *конъюнкцией* этих свойств и обозначать знаком $\wedge$ (читается «и»). Таким образом, то, что существует равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C , может быть записано знаками так:

$$(\exists \triangle ABC) ((\hat{C} = 90^\circ) \wedge ([AC] \cong [BC])). \quad (1)$$

Еще одним примером использования конъюнкции служит пересечение фигур. В самом деле, точка M принадлежит пересечению фигур F и P , если она, во-первых, принадлежит фигуре F и, во-вторых, принадлежит фигуре P . Это можно записать так: $F \cap P = \{M : (M \in F) \wedge (M \in P)\}$.

Кроме знака конъюнкции $\wedge$, в математике часто используется знак *дизъюнкции* $\vee$ (читается «или»). В обычной речи союз «или» чаще всего имеет разделительный оттенок, т. е. употребляется в смысле «либо... либо». Возьмем, например, фразу: «Я уезжаю, но за книгой пойдет моя сестра или брат». Здесь скорее всего имеется в виду, что пойдет либо сестра, либо брат; возможность, что они пойдут вместе, не предусматривается. В математике знак дизъюнкции не имеет разделительного смысла, т. е. если два свойства соединены знаком $\vee$, то это значит, что имеет место хотя бы одно из этих свойств, т. е. либо

имеет место первое свойство (но не второе), либо имеет место второе свойство (но не первое), либо же (и в этом отличие) имеют место оба свойства одновременно.

Рассмотрим в качестве примера объединение фигур F и P (рис. 332). Если точка M принадлежит фигуре $F \cup P$, то имеет место один из трех случаев:

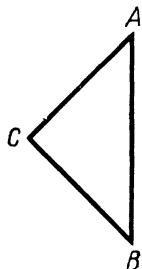


Рис. 331

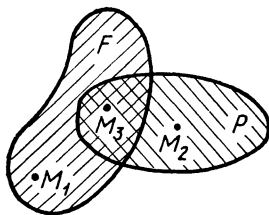


Рис. 332

- 1) $M \in F$, но $M \notin P$ (точка M_1 на рис. 332);
- 2) $M \in P$, но $M \notin F$ (точка M_2 на рис. 332);
- 3) $M \in F$ и $M \in P$ (точка M_3 на рис. 332).

Запись $(M \in F) \vee (M \in P)$ как раз и означает, что имеет место какой-либо из этих трех случаев. Итак,

$$F \cup P = \{M: (M \in F) \vee (M \in P)\}.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

а) Укажите, какие из треугольников на рисунке 333 обладают следующими свойствами:

- 1) $([AB] \cong [BC]) \wedge (\hat{B} < 90^\circ)$;
- 2) $([AB] \cong [BC]) \wedge (\hat{B} > 90^\circ)$;
- 3) $([AB] \cong [BC]) \wedge ([AB] \cong [AC])$;
- 4) $([AB] \cong [BC]) \wedge (\hat{C} < 90^\circ)$.

б) Какие из изображенных на рисунке 333 треугольников обладают следующими свойствами:

- 1) $([AB] \cong [BC]) \vee (\hat{B} < 90^\circ)$;
- 2) $([AB] \cong [BC]) \vee (\hat{B} > 90^\circ)$;
- 3) $([AB] \cong [BC]) \vee ([AB] \cong [AC])$;
- 4) $([AB] \cong [BC]) \vee (\hat{C} < 90^\circ)$?

в) Укажите, какие из следующих высказываний истинны:

- 1) $(\forall f, g) (f \text{— движение}) \wedge (g \text{— гомотетия}) \Rightarrow (f \circ g \text{— подобие})$;

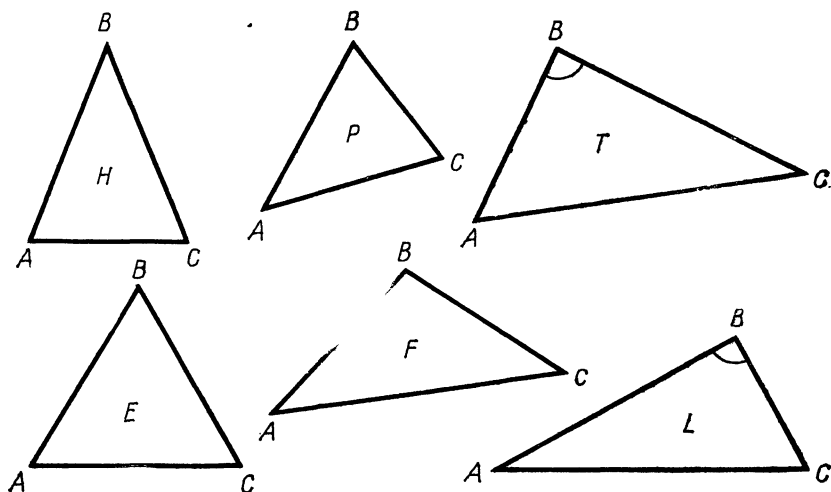


Рис. 333

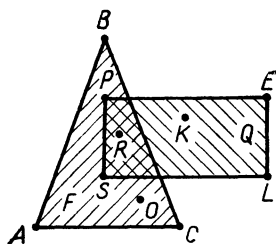


Рис. 334

- 2) $(\forall f, g) (f \circ g \text{ — подобие}) \Rightarrow (f \text{ — движение}) \wedge (g \text{ — гомотетия})$;
 3) $(\forall \triangle ABC, \triangle ABD) (\triangle ABC \cong \triangle ABD) \Rightarrow (C = D) \vee ((CD) \perp (AB))$;
 4) $(\forall k, \vec{a}) (k\vec{a} = \vec{0}) \Rightarrow (k = 0) \vee (\vec{a} = \vec{0})$;
 5) $(\forall \triangle ABC) (\exists! M) (|MA| = |MB|) \wedge (|MA| = |MC|)$;
 6) $(\forall \text{пр. } l, m, n) (\exists M) (d(M, l) = d(M, m)) \wedge (d(M, l) = d(M, n))$.

г) Какие из обозначенных на рисунке 334 точек принадлежат:

- 1) множеству $K = \{M : (M \in F) \wedge (M \in Q)\}$;
 2) множеству $N = \{M : (M \in F) \vee (M \in Q)\}$?

ЗАДАЧИ

509. Какие из следующих высказываний истинны? Вывод, если можно, подтвердите чертежом:

- а) $(\exists ABCD) (ABCD \text{ — прямоугольник}) \wedge ([AB] \cong [BC])$;
 б) $(\exists \triangle ABC) (\hat{A} = 60^\circ) \wedge (\hat{B} = 60^\circ) \wedge (|AB| = 5)$;
 в) $(\exists \triangle ABC) (|AB| = \frac{1}{2} |BC|) \wedge (\hat{A} < \hat{C})$.

510. Запишите, используя знаки $\wedge, \vee$, следующие утверждения:

- а) фигура S есть пересечение окружности с центром K радиуса 5 и круга с центром O радиуса 3;
 б) фигура S есть объединение круга с центром K радиуса 5 и круга с центром O радиуса 3;
 в) фигура S есть объединение окружности с центром K радиуса 5 и окружности с центром O радиуса 3.

511. Справедливы ли следующие теоремы? Справедливы ли обратные им теоремы? Объедините, если возможно, обе теоремы в одной словесной формулировке, используя термин «необходимо и достаточно»:

- а) $(\forall ABCD, O, \text{ где } O \text{ — точка пересечения диагоналей четырехугольника } ABCD) (ABCD \text{ — параллелограмм}) \Rightarrow ([AO] \cong [CO]) \wedge ([BO] \cong [DO])$;
 б) $(\forall \triangle ABC) ((\hat{C} = 90^\circ) \wedge (\hat{A} = 30^\circ)) \Rightarrow (|BC| = \frac{1}{2} |AB|)$.

512. Что представляет собой фигура S :

- а) $S = \{K : (|OK| > 3) \wedge (|OK| \leq 5)\}$;
 б) $S = \{K : (|OK| > 5) \wedge (|OK| \leq 3)\}$;
 в) $S = \{K : (|OK| = 5) \wedge (|OK| \geq 3)\}$;
 г) $S = \{K : (|OK| \leq 5) \wedge (|OK| \leq 3)\}$?

513. Справедлива ли теорема

- $(\forall ABCD) (ABCD \text{ — ромб}) \Leftrightarrow ((AC \text{ — ось симметрии } ABCD) \vee (BD \text{ — ось симметрии } ABCD))$?

69. ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Для введения новых понятий (на основе уже известных нам понятий) обычно используются предложения, в которых содержится слово «называется». Такие предложения называют *определениями*. Например, *определение ромба* формулируется следующим образом: *ромбом называется параллелограмм, две смежные стороны которого конгруэнтны между собой*. В этом определении (которое рассматривалось в курсе VI класса) новое понятие «ромб» введено на основе ряда понятий, уже известных к этому времени: «параллелограмм», «сторона параллелограмма», «смежные стороны», «конгруэнтность».

Как и теоремы, определения можно записывать с помощью знаков $\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$ и др. Рассмотрим это на примере определения ромба. Возьмем произвольный параллелограмм $ABCD$. Для того чтобы утверждать, что $ABCD$ — ромб, мы должны убедиться, что смежные стороны $[AB]$ и $[BC]$ конгруэнтны. Заметим, что выполнение этого условия является необходимым и достаточным, чтобы параллелограмм $ABCD$ был ромбом, т. е. мы в том и только в том случае называем параллелограмм $ABCD$ ромбом, если выполнено это условие. В результате определение приобретает вид:

$$\begin{aligned} (\forall ABCD, \text{ где } ABCD \text{ — параллелограмм}) \\ (ABCD \text{ — ромб}) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} ([AB] \cong [BC]). \end{aligned} \quad (1)$$

Запись «def», помещенная под знаком $\Leftrightarrow$, представляет собой сокращение английского слова definition (определение). Она означает, что формула (1) является определением, т. е. вводит новое понятие (в данном случае понятие ромба).

В качестве второго примера рассмотрим определение конгруэнтности фигур. Его можно записать так:

$$(\forall F, G, \text{ где } F, G \text{ — фигуры}) \underset{\text{def}}{(F \cong G) \Leftrightarrow (\exists g \in D) (g(F) = G)}.$$

Здесь через D обозначена группа движений, и все определение читается словами следующим образом: фигуры F и G называются конгруэнтными, если существует такое движение g , которое переводит фигуру F в фигуру G .

В VI классе были установлены некоторые необходимые и достаточные признаки ромба, например:

$$\begin{aligned} (\forall ABCD, \text{ где } ABCD \text{ — параллелограмм}) \\ (ABCD \text{ — ромб}) \Leftrightarrow (AC \perp BD). \end{aligned} \quad (2)$$

Утверждения (1) и (2) имеют совершенно одинаковую структуру. Однако роль этих утверждений неодинакова. Соотношение (1) является *определением*, т. е. используется для первоначального введения понятия ромба. Что же касается соотношения (2),

то оно не является определением, а представляет собой теорему и требует доказательства.

Заметим, что мы могли ввести понятие ромба и иначе. Например, можно было бы принять высказывание (2) за определение ромба. В этом случае утверждение (2) доказывать было бы не нужно (оно имело бы место по определению), но тогда утверждение (1) следовало бы уже рассматривать как теорему, которая должна быть доказана с помощью определения (2).

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Какие слова надо поставить на место пропусков, чтобы получились истинные высказывания? Отметьте знаком def высказывание, которое является определением:

$$1) (\forall ABCD) (ABCD - \dots) \Leftrightarrow ((AB \parallel CD) \wedge (AD \parallel BC));$$

$$2) (\forall ABCD) (ABCD - \dots) \Leftrightarrow ((AB \parallel CD) \vee (AD \parallel BC)).$$

- б) Какие знаки надо поставить на место пропусков, чтобы получились известные определения:

$$1) (\forall \triangle ABC) (\triangle ABC - \text{равнобедренный}) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (([AB] \cong [BC]) \dots$$

$$\dots ([BC] \cong [CA]) \dots ([CA] \cong [AB]));$$

$$2) (\forall \triangle ABC) (\triangle ABC - \text{равносторонний}) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (([AB] \cong [BC]) \dots$$

$$\dots ([BC] \cong [CA]) \dots ([CA] \cong [AB]));$$

- в) Прочитайте словами следующие определения:

$$1) (\forall F_1, F_2) (F_1 \text{ и } F_2 - \text{равновеликие фигуры}) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (S(F_1) = S(F_2));$$

$$2) (\forall F) (F \text{ фигура } F \text{ выпуклая}) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall A \in F, B \in F) ([AB] \subset F);$$

$$3) (\forall f, \text{ где } f - \text{отображение плоскости на себя} (f - \text{движение})) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} ((\forall T.A, B) (|f(A)f(B)| = |AB|)).$$

ЗАДАЧИ

514. Вспомните, какие углы называются смежными. Выпишите понятия, на основе которых введено понятие смежных углов. Запишите определение смежных углов символами.
515. Квадратом называется ромб, у которого один из углов прямой. Запишите это определение символами.
516. Вспомните и запишите символами определение подобия.

517. Вспомните определение вертикальных углов. Выпишите понятия, на основе которых вводится это определение. Запишите это определение символами.

518. Квадратом называется прямоугольник, у которого две смежные стороны конгруэнтны. Запишите это определение символами.

70. ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ ВЕКТОРОВ

Линейной комбинацией нескольких векторов называется сумма этих векторов, взятых с некоторыми числовыми коэффициентами.

Например, $2\vec{p} - 3\vec{q}$ — линейная комбинация векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ (рис. 335); $1,5\vec{a} + 3,2\vec{b} + 1,7\vec{c}$ — линейная комбинация векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и т. д.

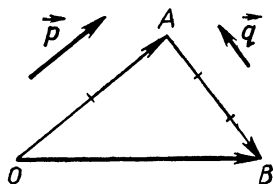


Рис. 335

Рассмотрим теперь на плоскости систему координат и обозначим через $\vec{e}_1$ вектор длины 1, идущий в положительном направлении оси абсцисс, а через $\vec{e}_2$ вектор длины 1, идущий в положительном направлении оси ординат (рис. 336). Векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ называются *базисными векторами* рассматриваемой координатной системы.

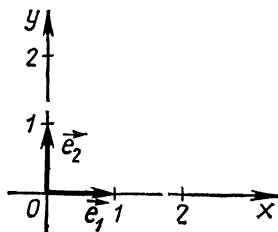


Рис. 336

Теорема. *Любой вектор на плоскости однозначно представляется в виде линейной комбинации базисных векторов.*

Доказательство. Пусть $\vec{a}$ — некоторый вектор. Отложим его от начала координат O , т. е. найдем такую точку M , что $\vec{OM} = \vec{a}$.

Если точка M лежит на оси абсцисс (рис. 337), то

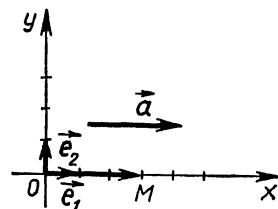


Рис. 337

$$\vec{OM} = x\vec{e}_1,$$

где $|x| = |\vec{OM}|$, а знак числа x будет положительным, если M лежит на положительной полуоси, и отрицательным в противном случае. Итак, если точка M лежит на оси абсцисс, то

$$\vec{a} = \vec{OM} = x\vec{e}_1 = x\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2,$$

т. е. в этом случае вектор $\vec{a}$ представляется в виде линейной комбинации базисных векторов.

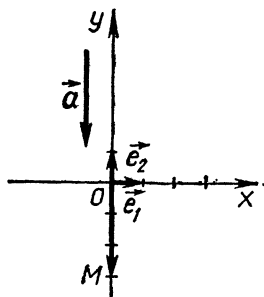


Рис. 338

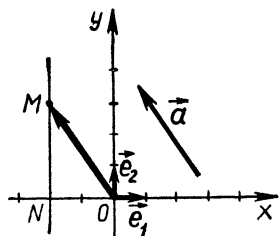


Рис. 339

Аналогично, если точка M лежит на оси ординат (рис. 338), то

$$\vec{a} = \vec{OM} = y\vec{e}_2 = 0\vec{e}_1 + y\vec{e}_2,$$

где y — некоторое число.

Наконец, рассмотрим случай, когда точка M не лежит ни на одной из осей. Проведем через точку M прямую, параллельную оси ординат, и обозначим через N точку пересечения этой прямой с осью абсцисс (рис. 339). Тогда $\vec{ON} = x\vec{e}_1$. Далее, так как вектор $\vec{NM}$ параллелен оси ординат, то

$$\vec{NM} = y\vec{e}_2.$$

Следовательно,

$$\vec{a} = \vec{OM} = \vec{ON} + \vec{NM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

Итак, в любом случае вектор $\vec{a}$ представляется в виде линейной комбинации базисных векторов.

Остается доказать единственность.

Допустим, что некоторый вектор $\vec{a}$ двумя различными способами представляется в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$\vec{a} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2, \quad (1)$$

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2. \quad (2)$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем:

$$(x' - x)\vec{e}_1 + (y' - y)\vec{e}_2 = \vec{0}.$$

Если было бы $x' - x \neq 0$, то

$$\vec{e}_1 = -\frac{y' - y}{x' - x}\vec{e}_2,$$

что невозможно, так как векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ не параллельны. Значит, обязательно должно быть $x' - x = 0$, т. е. $x' = x$. Точно так же устанавливается, что $y' = y$. Но это противоречит тому, что (1) и (2) — *разные* записи вектора $\vec{a}$ в виде линейной комбинации базисных векторов.

Замечание. В формулировке теоремы сказано, что любой вектор *представляется* в виде линейной комбинации базисных векторов. Это означает, что для любого вектора $\vec{a}$ *существуют* такие коэффициенты x и y , что $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Вместе с тем сказано, что коэффициенты x и y определяются однозначно. Поэтому

доказанная теорема может быть записана следующим образом:

$$(\forall \vec{a}) (\exists! x, y) (\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2).$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Представляется ли в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вектор: 1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $\vec{0}$; 4) $\vec{a}$; 5) $\vec{b}$; 6) $2\vec{b} - \vec{a}$? В каждом случае укажите коэффициенты линейной комбинации.
- б) Правильно ли записано определение $(\forall \vec{m}, \vec{a}, \vec{b})$ ($\vec{m}$ представляется в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$) $\Leftrightarrow (\exists k, l) (\vec{m} = k\vec{a} + l\vec{b})$?
- в) Представьте каждый вектор $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$ (рис. 340) в виде линейной комбинации базисных векторов.

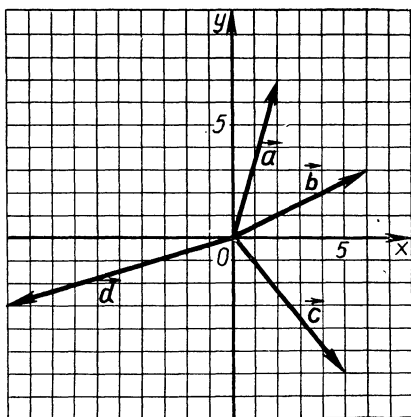


Рис. 340

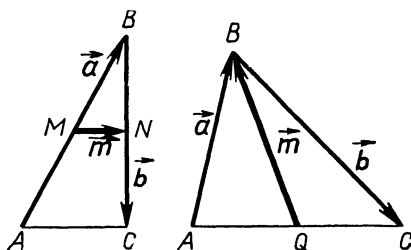


Рис. 341

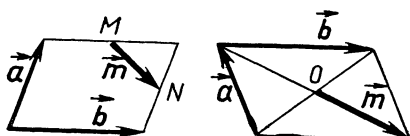


Рис. 342

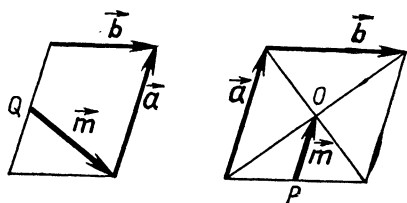


Рис. 343

ЗАДАЧИ

519. Выразите вектор $\vec{m}$ (рис. 341) в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (точки M, N и Q — середины сторон треугольников).
520. Выразите вектор $\vec{m}$ (рис. 342) в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (M, N, P, Q — середины сторон параллелограммов).
521. Представьте вектор $\vec{c}$ (рис. 343) в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

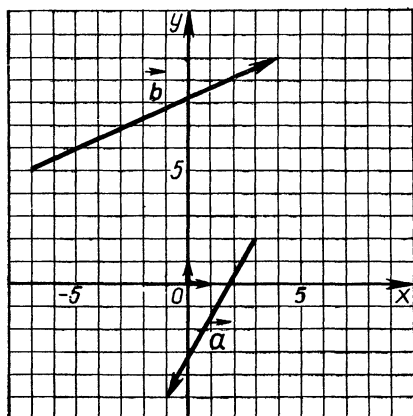


Рис. 344

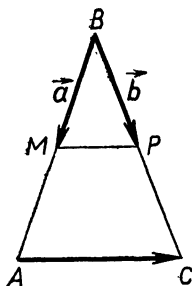


Рис. 345

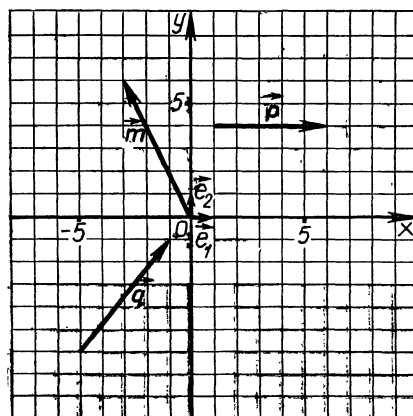


Рис. 346

522. Скопируйте в тетрадь рисунок 344. Отложите векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от начала координат. Запишите векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в виде линейной комбинации базисных векторов.

523. Докажите, что вектор $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$ есть линейная комбинация векторов $\vec{a} = 5\vec{p} - \vec{q}$ и $\vec{b} = -4\vec{p} + \vec{q}$.

524. Запишите вектор $\vec{AC}$ (рис. 345) в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (отрезок MP — средняя линия треугольника).

525. Представьте векторы $\vec{m}$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ в виде линейной комбинации базисных векторов (рис. 346).

526. Представьте вектор $\vec{c}$ (рис. 347) в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

527. Отложите от начала координат вектор $\vec{a} = -2,5\vec{e}_1 - 3,4\vec{e}_2$.

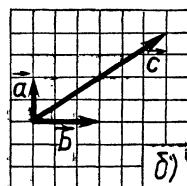
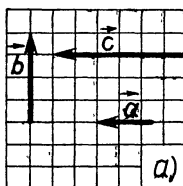


Рис. 347

71. КООРДИНАТНАЯ ЗАПИСЬ ДЕЙСТВИЙ НАД ВЕКТОРАМИ

Как было доказано в предыдущем пункте, любой вектор $\vec{a}$ однозначно записывается в виде:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2,$$

где $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ — базисные векторы координатной системы. Числа x и y называются *координатами* вектора $\vec{a}$ в рассматриваемой системе.

Например, вектор $\vec{a}$ (рис. 348) имеет координаты $x=2$, $y=3$. В самом деле, $\vec{OM} = 2\vec{e}_1$, $\vec{ON} = 3\vec{e}_2$; значит, $\vec{OP} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$. Так как $\vec{a} = \vec{OP}$, то

$$\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2,$$

откуда видно, что координатами вектора $\vec{a}$ будут числа $x=2$ и $y=3$.

Теорема 1. Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты x_1 , y_1 , а вектор $\vec{b}$ имеет координаты x_2 , y_2 , то вектор $\vec{a} + \vec{b}$ имеет координаты $x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$.

Доказательство. Мы имеем:

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2, \quad \vec{b} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2.$$

Складывая эти равенства, находим:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{e}_1 + (y_1 + y_2)\vec{e}_2,$$

а это и означает, что координатами вектора $\vec{a} + \vec{b}$ являются числа $x_1 + x_2$, $y_1 + y_2$.

Теорема 2. Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты x , y , то для любого k вектор $k\vec{a}$ имеет координаты kx , ky .

Доказательство. Мы имеем:

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

Умножив обе части равенства на k , получаем:

$$\begin{aligned} k\vec{a} &= k(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = k(x\vec{e}_1) + k(y\vec{e}_2) = \\ &= (kx)\vec{e}_1 + (ky)\vec{e}_2, \end{aligned}$$

а это и означает, что координатами вектора $k\vec{a}$ являются числа kx , ky . Теорема доказана.

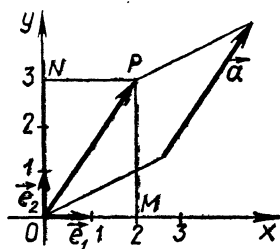


Рис. 348

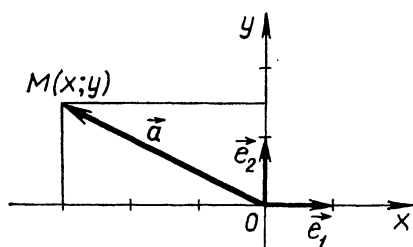


Рис. 349

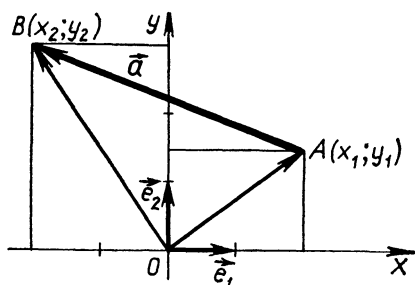


Рис. 350

Ясно, что если вектор $\vec{a}$ отложен от начала координат (рис. 349), то координаты вектора $\vec{a}$ совпадают с координатами его конца M . Естественно возникает вопрос, как найти координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ (рис. 350), если известны координаты точек A и B . Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 3. Пусть x_1, y_1 — координаты точки A , $a x_2, y_2$ — координаты точки B . Тогда вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $x_2 - x_1, y_2 - y_1$.

Доказательство. Обозначим через x и y искомые координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. Так как вектор $\overrightarrow{OA}$ имеет координаты x_1, y_1 , то вектор

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$

имеет координаты $x_1 + x, y_1 + y$ (теорема 1). Но координаты вектора $\overrightarrow{OB}$ нам известны (они равны x_2 и y_2). Следовательно,

$$x_1 + x = x_2, y_1 + y = y_2,$$

откуда находим искомые координаты x, y :

$$x = x_2 - x_1, y = y_2 - y_1.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

а) Верно ли, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют одни и те же координаты, то $\vec{a} = \vec{b}$?

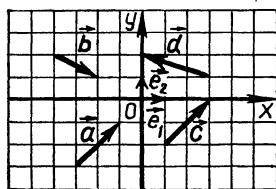


Рис. 351

б) Найдите координаты векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$, изображенных на рисунке 351.

в) Что можно сказать о координатах вектора $\vec{a}$, если он:

- 1) параллелен оси x ; 2) параллелен оси y ; 3) перпендикулярен оси x ; 4) перпендикулярен оси y ; 5) равен $\vec{0}$?

- г) Вектор $\vec{a}$ имеет координаты $x_1 = -5; y_1 = 3$, вектор $\vec{b}$ имеет координаты $x_2 = 2; y_2 = 1$. Чему равны координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$? Вектора $3\vec{a}$? Вектора $-\vec{a}$? Вектора $\vec{a} - \vec{b}$?

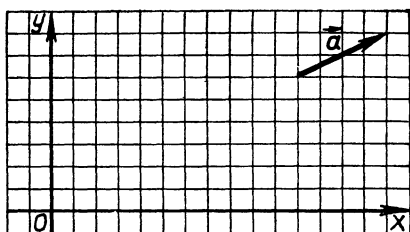


Рис. 352

ЗАДАЧИ

528. Отложите от точки $M(3; 2)$ вектор, имеющий координаты $x = 5, y = 4$.
529. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты $x = 4, y = -6$. Чему равны координаты вектора: а) симметричного вектору $\vec{a}$ относительно оси y ; б) симметричного вектору $\vec{a}$ относительно биссектрисы первого координатного угла?
530. Определите координаты вектора $\vec{a}$ (рис. 352). Найдите координаты вектора $k\vec{a}$ при $k = 3; -2,5; -1$. Постройте эти векторы.
531. На координатной плоскости заданы следующие точки: $A(3; 4); B(-2; 1); C(5; 8)$ и $D(-3; -6)$. Вычислите координаты векторов $\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AC}, \vec{BC}, \vec{BD}, \vec{CD}$ и запишите их в виде линейной комбинации векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.
532. Вершины параллелограмма находятся в точках $A(-1; 3), B(1; -3), C(6; -3)$ и $D(4; 3)$. Вычислите координаты точки пересечения диагоналей параллелограмма.
533. Вершины треугольника находятся в точках $A(1; 1), B(4; 5)$ и $C(-2; 6)$. Определите координаты середин сторон треугольника и координаты его центра тяжести.
-
534. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты $x = 2, y = 3$, вектор $\vec{b}$ имеет координаты $x = -2, y = 5$. Найдите координаты векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если известно, что $\vec{a} = 3\vec{p} - 3\vec{q}, \vec{b} = -\vec{p} + 3\vec{q}$.
535. Вектор $\vec{m}$ имеет координаты $x = 2,5; y = 3$. Чему равны координаты вектора: а) симметричного вектору $\vec{m}$ относительно оси x ; б) симметричного вектору $\vec{m}$ относительно начала координат?
536. Даны точки $A(-6; -4), B(3; 5)$ и $C(6; -3)$. Вычислите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$.

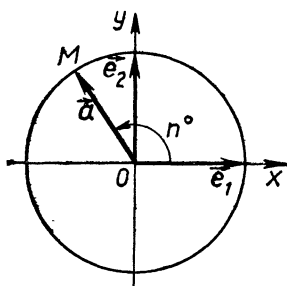


Рис. 353

537. Вершина A треугольника ABC , середина M стороны AB и середина P стороны BC имеют следующие координаты: $A(-1; -1)$, $M(-5; 3)$, $P(3; 7)$. Определите координаты вершин B и C .

72. КОСИНУС И СИНОС

Возьмем систему координат и соответствующие базисные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

Повернем вектор $\vec{e}_1$ на некоторый угол n° вокруг точки O (рис. 353). Вектор, получившийся в результате поворота, обозначим через $\vec{a}$. Если вектор $\vec{a}$ отложить от начала координат O , то получим точку M , которая лежит на окружности радиуса 1 с центром в начале координат.

Координаты вектора $\vec{a}$ (или, что то же самое, координаты точки M) принято обозначать особыми символами: абсциссу — через $\cos n^\circ$; ординату — через $\sin n^\circ$. Словами знак $\cos$ читается «косинус»; знак $\sin$ — «синус».

Таким образом, определение $\cos n^\circ$ можно записать в виде: $(\forall n, x) (\cos n^\circ = x) \Leftrightarrow (\text{вектор, полученный из } \vec{e}_1 \text{ поворотом на } n^\circ, \text{ имеет своей абсциссой число } x)$.

Аналогично можно записать определение $\sin n^\circ$.

На рисунке 354 изображен круг радиуса 1 на фоне сетки квадратов (причем стороны наименьшего квадрата имеют длину 0,05). Пользуясь этим чертежом, нетрудно находить приближенные значения синусов и косинусов различных углов.

Для этого нужно отложить от точки O вектор $\vec{OA}$ длины 1, составляющий с вектором $\vec{e}_1$ угол n° , и, пользуясь сеткой квадратов, найти координаты этого вектора. На рисунке 354 показаны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$, образующие с вектором $\vec{e}_1$ углы 40° , 70° , 130° и 200° . Из этого рисунка видно, что

$\cos 40^\circ \approx 0,77$; $\cos 70^\circ \approx 0,34$; $\cos 130^\circ \approx -0,64$; $\cos 200^\circ \approx -0,94$;
 $\sin 40^\circ \approx 0,64$; $\sin 70^\circ \approx 0,94$; $\sin 130^\circ \approx 0,77$; $\sin 200^\circ \approx -0,34$.

Замечание. Для того чтобы определить числа $\cos n^\circ$ и $\sin n^\circ$, мы должны согласно сказанному выше не только указать угол n° , но также выбрать систему координат и, в частности, задать единицу измерения. В действительности, числа $\cos n^\circ$ и $\sin n^\circ$ от выбора системы координат (и единицы измерения) не зависят, а полностью определяются указанием только угла n° . (Доказательство этого факта мы не рассматриваем.)

Теорема. Пусть $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ — базисные векторы системы координат и $\vec{b}$ — произвольный вектор (отличный от $\vec{0}$);

тогда координаты вектора $\vec{b}$ равны $x=|\vec{b}|\cos n^\circ$, $y=|\vec{b}|\sin n^\circ$, где n° —угол, на который нужно повернуть вектор $\vec{e}_1$, чтобы получить вектор того же направления, что и вектор $\vec{b}$.

Доказательство. Обозначим через $\vec{a}$ вектор длины 1, имеющий то же направление, что и вектор $\vec{b}$ (рис. 355). Тогда $\vec{b}=k\vec{a}$, где k —положительное число, равное отношению длин векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$, т. е. $k=|\vec{b}|$ (так как $|\vec{a}|=1$). По определению вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\cos n^\circ$ и $\sin n^\circ$. Следовательно, согласно теореме 2 предыдущего пункта вектор $\vec{b}=k\vec{a}$ имеет координаты $k\cos n^\circ$, $k\sin n^\circ$. Остается вспомнить, что $k=|\vec{b}|$.

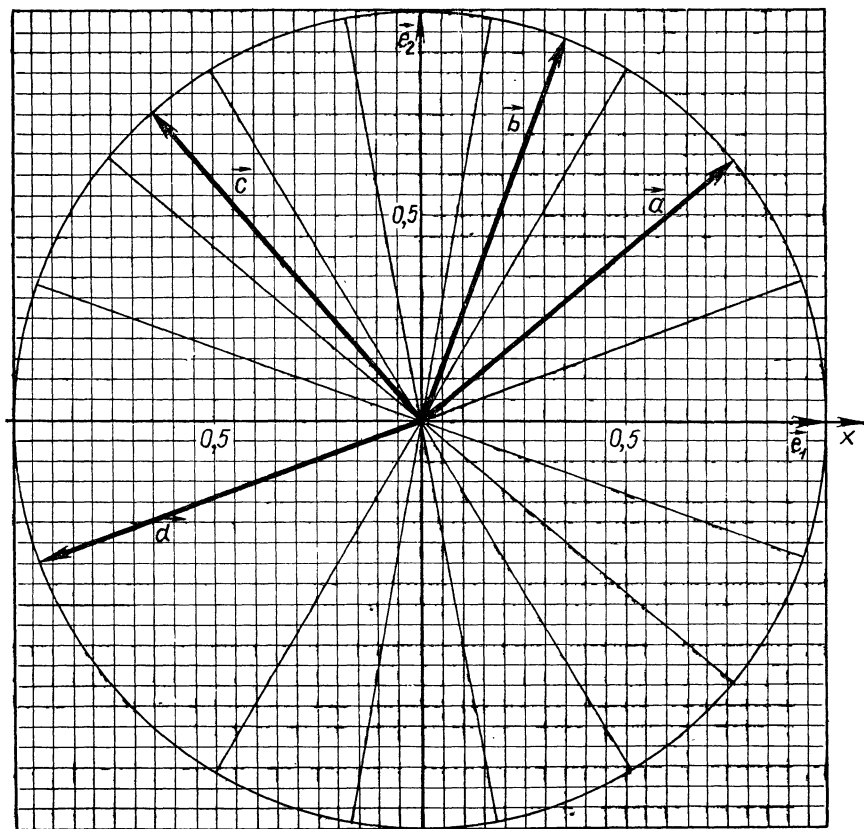


Рис. 354

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

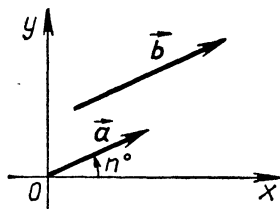


Рис. 355

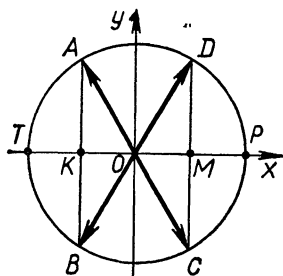


Рис. 356

а) Вектор $\vec{a}$ получен поворотом вектора $\vec{e}_1$ на такой угол n° , что $\cos n^\circ = -0,5$. Сколько существует векторов $\vec{a}$, удовлетворяющих условию задачи (рис. 356)?

б) Какие из следующих высказываний истинны:

- 1) $(\exists n) (\sin n^\circ = 1)$;
- 2) $(\exists n) (\sin n^\circ = 2)$;
- 3) $(\exists n) (\sin n^\circ = 0,001)$;
- 4) $(\exists n) (\cos n^\circ = \sin n^\circ)$;
- 5) $(\exists n) (\cos n^\circ = -\sin n^\circ)$;
- 6) $(\forall m, n) (\cos m^\circ = \cos n^\circ) \Rightarrow (m = n)$;
- 7) $(\forall m, n) (\sin m^\circ = \sin n^\circ) \Rightarrow (m = n)$?

в) Докажите справедливость следующих высказываний:

- 1) $(\exists n) ((\sin n^\circ < 0) \wedge (\cos n^\circ > 0))$;
- 2) $(\exists n) ((\sin n^\circ < 0) \wedge (\cos n^\circ < 0))$;
- 3) $(\exists n) ((\sin n^\circ > 0) \wedge (\cos n^\circ < 0))$.

г) Докажите, что для любого x , удовлетворяющего условию $-1 \leq x \leq 1$, существует один и только один угол n° , который удовлетворяет условиям $0 \leq n^\circ \leq 180^\circ$ и $\cos n^\circ = x$.

ЗАДАЧИ

538. Начертите систему координат и примите за единицу измерения отрезок 1 дм. Постройте векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получающиеся из $\vec{e}_1$ поворотом на 60° и 120° .

а) Найдите координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

б) Чему равны $\sin 60^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\sin 120^\circ$, $\cos 120^\circ$? С какой точностью найдены эти значения?

539. Пользуясь рисунком 354, найдите синусы и косинусы углов 20° , 80° , 100° , 110° , 180° , 270° и 300° .

540. Постройте вектор, получающийся из $\vec{e}_1$ поворотом на угол n° , для которого $\cos n^\circ = 0,6$. Сколько существует удовлетворяющих этому условию углов, заключенных между: а) 0° и 360° ; б) 0° и 180° ; в) 0° и 90° ; г) 0° и 45° ?

541. Вектор $\vec{a}$ получен поворотом вектора $2\vec{e}_1$ на угол 70° . Представьте вектор $\vec{a}$ в виде линейной комбинации базисных векторов.

542. Определите, используя рисунок 354, синусы и косинусы следующих углов: 10° , 30° , 50° , 90° , 140° , 210° и 330° .
543. Найдите по рисунку 354 угол (в пределах от 0° до 360°) по следующим значениям косинуса и синуса: а) $\sin n^\circ = 0,5$; б) $\cos n^\circ = 0,5$; в) $\sin n^\circ = -0,2$; г) $\cos n^\circ = -0,8$.
544. Постройте вектор, получающийся из $\vec{e}_1$ поворотом на угол n° , для которого $\sin n^\circ = 0,75$. Сколько существует удовлетворяющих этому условию углов, заключенных между: а) 0° и 360° ; б) 0° и 180° ; в) 0° и 90° ; г) 0° и 45° ?

73. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Теорема. Для любого угла n° справедливы формулы:

$$\cos(180^\circ - n^\circ) = -\cos n^\circ; \quad \sin(180^\circ - n^\circ) = \sin n^\circ; \quad (1)$$

$$\cos(-n^\circ) = \cos n^\circ; \quad \sin(-n^\circ) = -\sin n^\circ; \quad (2)$$

$$\cos(360^\circ + n^\circ) = \cos n^\circ; \quad \sin(360^\circ + n^\circ) = \sin n^\circ. \quad (3)$$

Доказательство. Для доказательства формул (1) заметим, что векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, получающиеся из $\vec{e}_1$ поворотом на углы n° и $180^\circ - n^\circ$, симметричны относительно оси ординат (рис. 357), и, следовательно,

$$\cos(180^\circ - n^\circ) = -\cos n^\circ, \quad \sin(180^\circ - n^\circ) = \sin n^\circ.$$

Для доказательства формул (2) заметим, что векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, получающиеся из $\vec{e}_1$ поворотом на углы n° и $-n^\circ$, симметричны относительно оси абсцисс (рис. 358), и, следовательно,

$$\cos(-n^\circ) = \cos n^\circ, \quad \sin(-n^\circ) = -\sin n^\circ.$$

Формулы (3) следуют из того, что при повороте вектора $\vec{e}_1$ на углы n° и $360^\circ + n^\circ$, мы получаем один и тот же вектор (рис. 359).

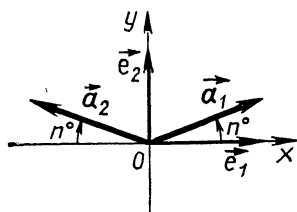


Рис. 357

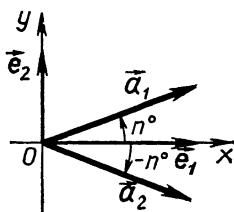


Рис. 358

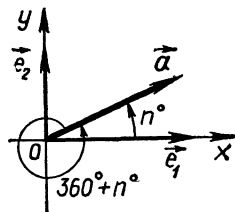


Рис. 359

	...	4°	...	...	$0,6^\circ$	...
$\vdots$						
50°		$0,809$			6	

Рис. 360

Доказанные соотношения (1) — (3) позволяют находить синусы и косинусы любых углов, зная значения синусов и косинусов углов от 0° до 90° . Например,

$$\begin{aligned}\cos(-300^\circ) &= \cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos(360^\circ + (-60^\circ)) = \\ &= \cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ, \\ \sin 200^\circ &= \sin(180^\circ + 20^\circ) = \sin(-20^\circ) = -\sin 20^\circ\end{aligned}$$

и т. д. Таблицы значений синусов и косинусов для углов от 0° до 90° приводятся в конце учебника.

Как пользоваться этими таблицами, покажем на примере задачи: «Найти синус угла $54,6^\circ$ ». Рассмотрим в таблице синусов строку, в начале которой написано 50° , и столбцы, в верхних частях которых написано 4° и $0,6^\circ$ (рис. 360). Взяв числа, находящиеся на пересечении взятой строки и указанных столбцов, находим:

$$\sin 54,6^\circ = 0,809 + 0,006 = 0,815.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

а) Справедливы ли следующие теоремы:

1) $(\forall A(x_1, y_1), B(x_2, y_2))$ (A и B симметричны относительно оси абсцисс) $\Rightarrow ((x_1 = x_2) \wedge (y_1 = -y_2))$;

2) $(\forall A(x_1, y_1), B(x_2, y_2))$ (A и B симметричны относительно оси ординат) $\Rightarrow ((x_1 = -x_2) \wedge (y_1 = y_2))$?

б) Докажите, что:

1) $\cos 160^\circ = -\cos 20^\circ$;

2) $\sin 160^\circ = \sin 20^\circ$;

3) $\cos(-20^\circ) = \cos 20^\circ$;

4) $\sin(-20^\circ) = -\sin 20^\circ$;

5) $\cos 380^\circ = \cos 20^\circ$;

6) $\sin 380^\circ = \sin 20^\circ$;

7) $\cos 340^\circ = \cos 20^\circ$;

8) $\sin 340^\circ = -\sin 20^\circ$.

в) Докажите, применяя симметрии относительно осей координат, что:

1) $\sin(180^\circ + n^\circ) = -\sin(180^\circ - n^\circ)$;

2) $\cos(180^\circ + n^\circ) = -\cos(180^\circ - n^\circ)$;

3) $\cos(180^\circ + n^\circ) = -\cos(-n^\circ)$;

4) $\sin(180^\circ + n^\circ) = \sin(-n^\circ)$.

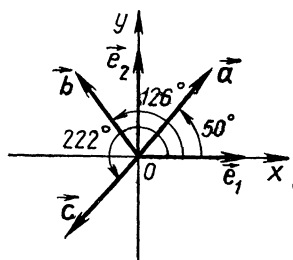


Рис. 361

545. Найдите, используя таблицу, помещенную в конце учебника, косинусы и синусы следующих углов: а) 40° ; б) 100° ; в) 210° ; г) -30° ; д) -300° .
546. Найдите, используя таблицу, углы (в пределах от 0° до 180°) по заданным значениям синуса: а) $\sin n^\circ = 0,358$; б) $\sin n^\circ = 0,669$; в) $\sin n^\circ = 0,978$; г) $\sin n^\circ = 1,0$.
547. Найдите, используя таблицу, углы (в пределах от 0° до 180°) по заданным значениям косинуса: а) $\cos n^\circ = 0,326$; б) $\cos n^\circ = 0,454$; в) $\cos n^\circ = 0,934$; г) $\cos n^\circ = 1,0$.
548. Найдите по таблице синусы и косинусы следующих углов: а) $20,5^\circ$; б) $15,2^\circ$; в) $45,3^\circ$; г) $80,7^\circ$; д) $63,4^\circ$; е) $0,9^\circ$.
549. Найдите по таблице острые углы по следующим данным: а) $\sin n^\circ = 0,381$; б) $\sin n^\circ = 0,980$; в) $\sin n^\circ = 0,707$; г) $\cos n^\circ = 0,032$; д) $\cos n^\circ = 0,702$; е) $\cos n^\circ = 0,891$.
550. На рисунке 361 изображены векторы, длина каждого из которых равна 1. Определите координаты этих векторов и запишите каждый из них в виде линейной комбинации базисных векторов.
551. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты x и y . Определите в каждом из следующих случаев, на какой угол надо повернуть $\vec{e}_1$, чтобы получить вектор, имеющий то же направление, что и вектор $\vec{a}$:
- а) $|\vec{a}| = 1$; $x = 0,42$; $y > 0$; б) $|\vec{a}| = 3$; $x = -1,29$; $y > 0$;
 в) $|\vec{a}| = 3,7$; $x > 0$; $y = -2,71$; г) $|\vec{a}| = 2,1$; $x < 0$; $y = -1,79$.
-
552. Найдите по таблице косинусы и синусы следующих углов: а) 70° ; б) $50,2^\circ$; в) $100,8^\circ$; г) 200° .
553. Найдите по таблице острые углы по следующим данным: а) $\cos n^\circ = 0,309$; б) $\cos n^\circ = 0,887$; в) $\sin n^\circ = 0,766$; г) $\sin n^\circ = 0,299$; д) $\cos n^\circ = 0,833$; е) $\cos n^\circ = 0,302$; ж) $\sin n^\circ = 0,499$; з) $\sin n^\circ = 0,654$.
554. Определите координаты вектора $\vec{a}$ по его длине и углу, на который надо повернуть $\vec{e}_1$, чтобы получить вектор того же направления, что и $\vec{a}$:
- а) $|\vec{a}| = 8,3$; $n^\circ = 44^\circ$; б) $|\vec{a}| = 11,2$; $n^\circ = 160^\circ$;
 в) $|\vec{a}| = 0,702$; $n^\circ = 90^\circ$.

74. ОТРИЦАНИЕ В ТЕОРЕМАХ И ОПРЕДЕЛЕНИЯХ

Для получения противоположной теоремы (или теоремы, противоположной обратной) приходится использовать *отрицание* условия и заключения исходной теоремы. Используется отрицание и при установлении *непринадлежности* к какому-либо понятию. Возьмем, например, следующее определение, известное из курса V класса:

($\forall t. A, B, O$, где $A \neq B$) (A и B симметричны относительно O) $\stackrel{\text{def}}{\iff} (O \text{ — середина } [AB])$.

Согласно этому определению утверждение « A и B не симметричны относительно O » означает, что O — не является серединой отрезка AB :

($\forall t. A, B, O$, где $A \neq B$) $\neg (A$ и B симметричны относительно O) $\iff \neg (O \text{ — середина } [AB])$.

Нередко в условиях и заключениях теорем, а также в определениях встречаются два или большее число свойств, соединенных знаками $\wedge$, $\vee$. Рассмотрим на примерах, как образуется отрицание в этих случаях.

Утверждение « $ABCD$ — ромб» означает согласно определению, что

$$(ABCD \text{ — параллелограмм}) \wedge ([AB] \cong [BC]).$$

Утверждение « $ABCD$ — не ромб» записывается в виде

$$\neg ((ABCD \text{ — параллелограмм}) \wedge ([AB] \cong [BC])). \quad (1)$$

Это означает, что хотя бы одно из высказываний « $ABCD$ — параллелограмм», « $[AB] \cong [BC]$ » места не имеет, т. е. истинно хотя бы одно из высказываний:

$$\neg (ABCD \text{ — параллелограмм}), \neg ([AB] \cong [BC]).$$

Иными словами, (1) означает то же самое, что и

$$\neg (ABCD \text{ — параллелограмм}) \vee \neg ([AB] \cong [BC]). \quad (2)$$

Если мы обозначим через P высказывание « $ABCD$ — параллелограмм», а через Q высказывание « $[AB] \cong [BC]$ », то (1) запишется в виде $\neg (P \wedge Q)$, а (2) — в виде $(\neg P) \vee (\neg Q)$. Как мы видели, высказывания (1) и (2) означают одно и то же:

$$\neg (P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q). \quad (3)$$

Соотношение (3) справедливо для любых высказываний (или предикатов) P , Q .

Далее, утверждение « $ABCD$ — трапеция» означает согласно определению, что $(AB \parallel CD) \vee (AD \parallel BC)$. Утверждение « $ABCD$ — не трапеция» записывается в виде:

$$\neg ((AB \parallel CD) \vee (AD \parallel BC)). \quad (4)$$

Это означает, что ни одно из высказываний « $AB \parallel CD$ », « $AD \parallel BC$ » места не имеет, т. е. истинны *оба* высказывания: $\neg (AB \parallel CD)$, $\neg (AD \parallel BC)$. Иными словами, (4) означает то же самое, что и

$$\neg (AB \parallel CD) \wedge \neg (AD \parallel BC). \quad (5)$$

Если мы обозначим через M высказывание « $AB \parallel CD$ », а через N — высказывание « $AD \parallel BC$ », то (4) запишется в виде $\neg (M \vee N)$, а (5) — в виде $(\neg M) \wedge (\neg N)$. Как мы видели, высказывания (4) и (5) означают одно и то же:

$$\neg (M \vee N) \iff (\neg M) \wedge (\neg N). \quad (6)$$

Соотношение (6) справедливо для любых высказываний (или предикатов) M , N .

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

а) Укажите, в каких из следующих случаев истинно высказывание $\neg ((x \in A) \vee (x \in B))$:

- 1) $x \in A$, $x \notin B$; 2) $x \notin A$, $x \in B$;
3) $x \in A$, $x \in B$; 4) $x \notin A$, $x \notin B$.

б) Укажите, в каких из следующих случаев истинно высказывание $\neg (\triangle ABC$ — равнобедренный треугольник с прямым углом A):

- 1) $\hat{A} = 90^\circ$, $|AC| \neq |AB|$; 2) $\hat{A} \neq 90^\circ$, $|AC| = |AB|$;
3) $\hat{A} = 90^\circ$, $|AC| = |AB|$; 4) $\hat{A} \neq 90^\circ$, $|AC| \neq |AB|$.

в) Сформулируйте для теоремы

($\forall ABCD$) ($ABCD$ — параллелограмм) $\Rightarrow (([AB] \cong [CD]) \wedge \wedge (AB \parallel CD))$:

1) обратную теорему; 2) противоположную теорему; 3) теорему, противоположную обратной.

ЗАДАЧИ

555. Запишите отрицания следующих предикатов, пользуясь формулами (3) и (6):

- а) $([AB] \cong [BC]) \wedge (\hat{B} < 90^\circ)$;
б) $([AB] \cong [BC]) \vee (\hat{B} > 90^\circ)$;
в) $([AB] \cong [BC]) \vee ([AB] \cong [AC])$;
г) $([AB] \cong [BC]) \wedge (\hat{C} < 90^\circ)$.

Для каких из треугольников на рисунке 333 выписанные предикаты превращаются в истинные высказывания?

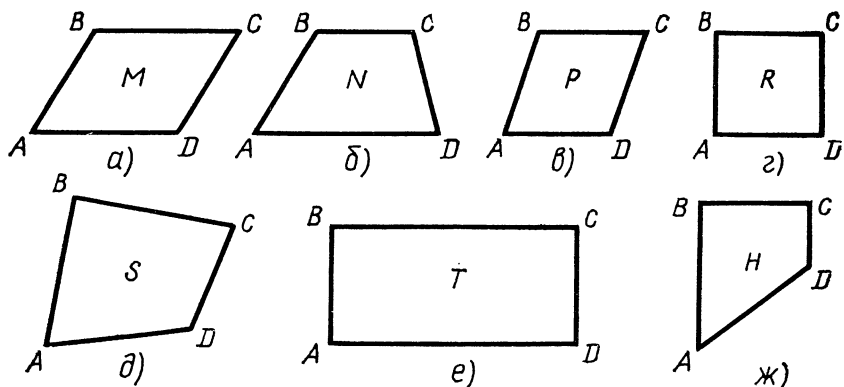


Рис. 362

556. Высказывание $(\exists \triangle ABC) \left(\left(|AB| = \frac{1}{2} |BC| \right) \wedge (\hat{A} < \hat{C}) \right)$ ложно, т. е. истинно его отрицание. Запишите различными способами это отрицание. Убедитесь в его истинности.
557. Запишите различными способами отрицание следующего высказывания:

$$(\forall t, O, M, A, \text{ где } M \in (OA)) \\ (|OM| + |MA| = |OA|) \vee (|OA| + |AM| = |OM|).$$

Установите, истинно ли получившееся отрицание?

558. Что представляет собой фигура M :

- а) $M = \{K: \neg ((|OK| > 3) \wedge (|OK| \leq 5))\};$
- б) $M = \{K: \neg ((|OK| > 5) \vee (|OK| \leq 3))\};$
- в) $M = \{K: \neg ((|OK| < 5) \vee (|OK| > 5))\};$
- г) $M = \{K: \neg ((|OK| = 5) \wedge (|OK| < 5))\}?$

559. Для теоремы $(\forall k, \vec{a}) (k\vec{a} = \vec{0}) \Rightarrow ((k = 0) \vee (\vec{a} = \vec{0}))$ сформулируйте теорему, противоположную обратной. Справедлива ли эта теорема?

560. Запишите отрицания следующих предикатов, пользуясь формулами (3) и (6):

- а) $([AB] \cong [CD]) \vee ((AB) \parallel (CD));$
- б) $([AB] \cong [BC]) \wedge (\hat{B} = 90^\circ);$
- в) $([AB] \cong [BC]) \vee ([AB] \cong [CD]).$

Для каких из четырехугольников на рисунке 362 выписанные предикаты превращаются в истинные высказывания?

561. Используя определение квадрата, запишите символами (двумя способами), в каком случае четырехугольник не является квадратом.

75. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Мы уже знаем две операции над векторами. Одна из них (сложение векторов) каждому двум векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ставит в соответствие вектор $\vec{a} + \vec{b}$. Другая операция (умножение вектора на число) ставит в соответствие вектору $\vec{a}$ и числу k также вектор $k\vec{a}$. В этом параграфе мы рассмотрим операцию, которая называется скалярным произведением векторов и которая каждому двум векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ставит в соответствие некоторое число. Именно тем, что результатом операции является число, и объясняется название операции «скалярное умножение» (в математике и физике «скалярами» называют величины, которые изображают на числовой шкале; слова «скаляр» и «шкала» происходят от общего латинского корня).

Прежде чем дать определение скалярного произведения, условимся, что мы будем понимать под углом между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Возьмем векторы $\vec{OA} = \vec{a}$ и $\vec{OB} = \vec{b}$ (т. е. отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной точки O). Рассмотрим поворот вокруг точки O , переводящий луч OA в луч OB . Мы всегда можем считать, что угол n° этого поворота удовлетворяет условию $-180^\circ \leq n^\circ \leq 180^\circ$. Число $|n^\circ|$ называется *углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$* . Таким образом, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ всегда заключен в пределах от 0° до 180° . Иначе говоря, угол между векторами может быть нулевым (рис. 363, а), острым (т. е. заключенным в пределах от 0° до 90° ; рис. 363, б), прямым (рис. 363, в), тупым (рис. 363, г) или развернутым (рис. 363, д).

Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a}\vec{b}$ и определяется равенством

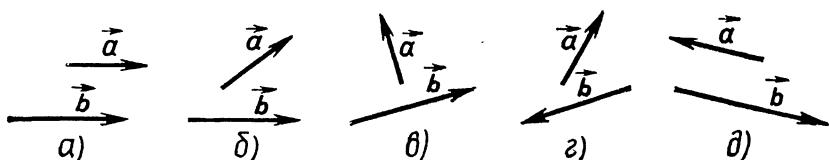


Рис. 363

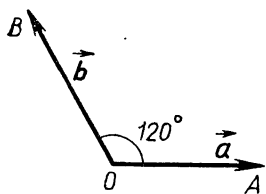


Рис. 364

$$\vec{a}\vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos n^\circ & \text{при } (\vec{a} \neq \vec{0}) \wedge (\vec{b} \neq \vec{0}); \\ 0 & \text{при } (\vec{a} = \vec{0}) \vee (\vec{b} = \vec{0}), \end{cases}$$

где n° — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Заметим, что скалярное произведение существенно зависит от выбора единицы измерения (так как в определении скалярного произведения участвуют длины векторов).

Из формулы

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos n^\circ$$

непосредственно следует, что угол между отличными от нуля векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будет: острым или равным нулю при $\vec{a}\vec{b} > 0$, тупым или развернутым при $\vec{a}\vec{b} < 0$, прямым при $\vec{a}\vec{b} = 0$.

Часто пользуются также термином «ортогональные векторы». Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными*, если $\vec{a}\vec{b} = 0$ (причем безразлично, являются ли векторы отличными от $\vec{0}$):

$$(\forall \vec{a}, \vec{b}) \text{ (векторы } \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ ортогональны)} \stackrel{\text{def}}{\iff} (\vec{a}\vec{b} = 0).$$

Иначе говоря, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны, то либо оба они отличны от нулевого вектора и образуют прямой угол, либо хотя бы один из этих векторов равен нулю (и тогда угол между ними не определяется).

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) На какой угол, заключенный между -180° и 180° , нужно повернуть луч OA (рис. 364), чтобы он перешел в луч OB ? На какой угол, заключенный между -180° и 180° , нужно повернуть луч OB , чтобы он перешел в луч OA ? Чему равен угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$? Чему равен угол между векторами $\vec{b}$ и $\vec{a}$?
- б) Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$ и: 1) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — одинаково направленные векторы; 2) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — противоположно направленные векторы; 3) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ортогональные векторы.
- в) Чему равен угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: 1) $\vec{a}\vec{b} = 1$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$; 2) $\vec{a}\vec{b} = -2$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$?
- г) Существуют ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, для которых $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $\vec{a}\vec{b} = 16$?

ЗАДАЧИ

562. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливо соотношение

$$-|\vec{a}||\vec{b}| \leq \vec{a}\vec{b} \leq |\vec{a}||\vec{b}|.$$

563. Вычислите скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$ по следующим данным (n° — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$):

а) $|\vec{a}| = 3,5$; $|\vec{b}| = 7,6$; $n^\circ = 43^\circ$;

б) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$; $n^\circ = 140^\circ$;

в) $|\vec{a}| = 351$; $|\vec{b}| = 847$; $n^\circ = 90^\circ$;

г) $|\vec{a}| = 2,9$; $|\vec{b}| = 1$, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны и противоположно направлены.

564. Под воздействием силы $\vec{f}$ материальная точка перемещается из положения A в положение B .

а) Вычислите работу силы $\vec{f}$ при этом перемещении, если $|\vec{f}| = 3,4$; $|AB| = 8,1$, а угол между направлением силы $\vec{f}$ и вектором $\vec{AB}$ составляет 37° (величины измерены в единицах системы СИ: перемещение — в м; сила — в Н; работа — в Дж).

б) Решите ту же задачу, если сила $\vec{f}$ и перемещение $\vec{AB}$ произвольные.

565. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по следующим данным:

а) $|\vec{a}| = 1$; $|\vec{b}| = 2$; $\vec{a}\vec{b} = 1,76$;

б) $|\vec{a}| = 1$; $|\vec{b}| = 2$; $\vec{a}\vec{b} = -1,76$.

566. Вычислите скалярное произведение $\vec{p}\vec{q}$ (n° — угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$):

а) $|\vec{p}| = 3,5$; $|\vec{q}| = 8,1$; $n^\circ = 28,5^\circ$;

б) $|\vec{p}| = 0,475$; $|\vec{q}| = 1,09$; $n^\circ = 138^\circ$.

567. Груз, скользящий без трения по горизонтальному стержню и находившийся вначале в положении покоя, под воздействием силы $\vec{f}$ приобрел через некоторое время скорость $\vec{v}$. Чему равна мощность, развиваемая силой $\vec{f}$? Вычислите эту мощность, когда $|\vec{f}| = 5,11$ Н, $|\vec{v}| = 3,5$ м/с, а сила и скорость образуют угол 80° .

76. СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

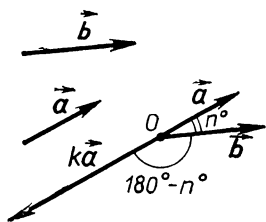
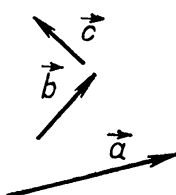
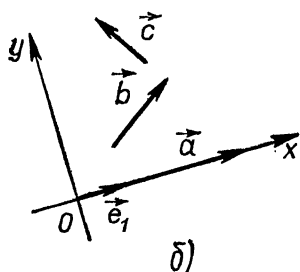


Рис. 365



а)



б)

Рис. 366

а) Скалярное произведение коммутативно:

$$(\vec{a}, \vec{b}) (\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}).$$

Это свойство непосредственно вытекает из того, что угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен углу между векторами $\vec{b}$ и $\vec{a}$.

б) Числовой множитель можно выносить за знак скалярного произведения:

$$(\vec{a}, \vec{b}, k) ((k\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a}\vec{b})).$$

Достаточно рассмотреть случай, когда $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $k \neq 0$. Обозначим угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через n° . Если $k > 0$, то вектор $k\vec{a}$ имеет то же направление, что и вектор $\vec{a}$, и потому угол между векторами $k\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен n° . Следовательно, в этом случае

$$\begin{aligned} (k\vec{a})\vec{b} &= |k\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos n^\circ = \\ &= k(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos n^\circ) = k(\vec{a}\vec{b}). \end{aligned}$$

Если же $k < 0$, т. е. $|k| = -k$, то направление вектора $k\vec{a}$ противоположно направлению вектора $\vec{a}$ и, следовательно, угол между векторами $k\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $180^\circ - n^\circ$ (рис. 365). Следовательно, в этом случае

$$\begin{aligned} (k\vec{a})\vec{b} &= |k\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(180^\circ - n^\circ) = |k| |\vec{a}| |\vec{b}| (-\cos n^\circ) = \\ &= -(-k) |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos n^\circ = k(|\vec{a}| |\vec{b}| \cos n^\circ) = k(\vec{a}\vec{b}). \end{aligned}$$

в) Скалярное произведение дистрибутивно:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) (\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}).$$

В самом деле, пусть даны три ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 366, а). Рассмотрим систему координат, у которой направление базисного вектора $\vec{e}_1$ совпадает с направлением вектора $\vec{a}$ (рис. 366, б). Обозначим через (x_1, y_1) координаты вектора $\vec{b}$

в этой системе, а через (x_2, y_2) координаты вектора $\vec{c}$; тогда вектор $\vec{b} + \vec{c}$ имеет координаты $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Согласно теореме п. 72 имеем:

$$x_1 = |\vec{b}| \cos m^\circ, \quad x_2 = |\vec{c}| \cos n^\circ, \quad x_1 + x_2 = |\vec{b} + \vec{c}| \cos p^\circ,$$

где $m^\circ, n^\circ, p^\circ$ — углы, на которые надо повернуть вектор $\vec{e}_1$, чтобы его направление совпало с направлениями векторов $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{b} + \vec{c}$ соответственно. Далее, из определения скалярного произведения находим:

$$\begin{aligned} \vec{a}\vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos m^\circ = |\vec{a}| x_1; \quad \vec{a}\vec{c} = |\vec{a}| |\vec{c}| \cos n^\circ = |\vec{a}| x_2; \\ \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) &= |\vec{a}| |\vec{b} + \vec{c}| \cos p^\circ = |\vec{a}| (x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c} = |\vec{a}| x_1 + |\vec{a}| x_2 = |\vec{a}| (x_1 + x_2) = \vec{a}(\vec{b} + \vec{c}).$$

г) Скалярное произведение отличного от нуля вектора на себя — число положительное.

Скалярное произведение $\vec{a}\vec{a}$ называют *скалярным квадратом* вектора $\vec{a}$ и обозначают через $\vec{a}^2$. Таким образом, свойство г) можно записать в виде:

$$(\forall \vec{a} \neq \vec{0}) (\vec{a}^2 > 0).$$

В самом деле,

$$\vec{a}\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2 > 0.$$

З а м е ч а н и е. Ценность скалярного произведения состоит в том, что с его помощью можно находить длины отрезков (по формуле $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$) и косинусы углов (а потому по таблице и сами углы). В то же время скалярное произведение коммутативно и дистрибутивно, и потому вычисления со скалярным произведением проводятся по правилам, хорошо знакомым из алгебры.

Например,

$$\begin{aligned} \vec{a}(3\vec{b} - 2\vec{c}) &= \vec{a}(3\vec{b}) - \vec{a}(2\vec{c}) = 3\vec{a}\vec{b} - 2\vec{a}\vec{c}; \\ (\vec{a} + \vec{b})^2 &= \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2. \end{aligned}$$

Имеется, однако, одно существенное различие между алгеброй векторов и обычной алгеброй: *обе части векторного равенства нельзя разделить на общий множитель, даже отличный от нулевого вектора*. В самом деле, из равенства $\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}$ для чисел a , b и $c \neq 0$ вытекает, что $a = b$, но из равенства $\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}$ (при $\vec{c} \neq \vec{0}$)

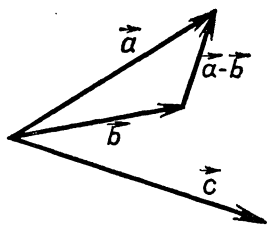


Рис. 367

вытекает лишь, что $\vec{a}\vec{c} - \vec{b}\vec{c} = 0$, т. е. $(\vec{a} - \vec{b})\vec{c} = 0$, и, следовательно, вектор $\vec{a} - \vec{b}$ ортогонален вектору $\vec{c}$ (рис. 367).

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Соотношение $(\forall \vec{a}, \vec{b}, k) (\vec{a}(k\vec{b}) = k(\vec{a}\vec{b}))$ доказывается следующим образом: $\vec{a}(k\vec{b}) = (k\vec{b})\vec{a} = k(\vec{b}\vec{a}) = k(\vec{a}\vec{b})$. Объясните каждый шаг этого рассуждения.
- б) Докажите, что если $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$, то для любого вектора $\vec{c}$ справедливо соотношение $\vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} = 0$. Какие свойства скалярного произведения используются при доказательстве?
- в) Объясните каждый шаг следующего вывода:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b})\vec{a} + (\vec{a} + \vec{b})\vec{b} = \vec{a}\vec{a} + \vec{b}\vec{a} + \vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{b} = \vec{a}^2 + \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2.$$

ЗАДАЧИ

568. В каком случае имеет место равенство

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2?$$

569. Вычислите скалярное произведение

$$(3\vec{e}_1 + \vec{e}_2)(2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_1),$$

где $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ — базисные векторы.

570. Используя свойства скалярного произведения, докажите, что

$$(\forall \vec{a}, \vec{b}) ((\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2).$$

571. Отличные от нуля векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не параллельны между собой. При каком значении k вектор $\vec{a} + k\vec{b}$ ортогонален вектору $\vec{b}$?

572. Докажите, что скалярное произведение двух векторов не изменится, если к одному из них прибавить вектор, ортогональный другому.

573. Известно, что векторы $\vec{s} + 2\vec{t}$ и $5\vec{s} - 4\vec{t}$ ортогональны. Какой угол образуют векторы $\vec{s}$ и $\vec{t}$, если $|\vec{s}| = |\vec{t}| = 1$?

574. Упростите выражение $(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$, если вектор $\vec{b}$ ортогонален вектору $\vec{c}$.

575. Докажите, что вектор $(\vec{ab})\vec{c} - (\vec{ac})\vec{b}$ ортогонален вектору $\vec{a}$.

576. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы имело место равенство

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|?$$

77. ПРИМЕНЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

В этом пункте будут рассмотрены три задачи, иллюстрирующие возможности применения скалярного произведения при решении геометрических задач. В первой задаче скалярное произведение используется для вычисления длин отрезков, вторая задача дает пример применения скалярного произведения к нахождению углов, в третьей скалярное произведение используется для установления перпендикулярности прямых.

Задача 1. Доказать, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон.

Решение. Примем направленные отрезки, идущие по двум смежным сторонам параллелограмма $ABCD$, за представителей векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. На рисунке 368 $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{b}$. Отсюда находим $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{DB} = \vec{a} - \vec{b}$. Найдем теперь сумму скалярных квадратов векторов $\vec{AC}$ и $\vec{DB}$:

$$\begin{aligned}\vec{AC}^2 + \vec{DB}^2 &= (\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = \\ &= \vec{a}^2 + 2\vec{ab} + \vec{b}^2 + \vec{a}^2 - 2\vec{ab} + \vec{b}^2 = 2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2.\end{aligned}$$

Это и означает, что

$$|AC|^2 + |DB|^2 = 2|AB|^2 + 2|AD|^2.$$

Задача 2. Найти величину угла при вершине равнобедренного треугольника, если известно, что медианы, проведенные к его боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.

Решение. Пусть треугольник ABC , в котором $|AC| = |BC| = l$, удовлетворяет условию задачи: $[BM]$ и $[AN]$ — медианы треугольника, $(BM) \perp (AN)$. Обозначим

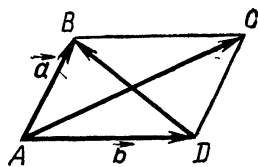


Рис. 368

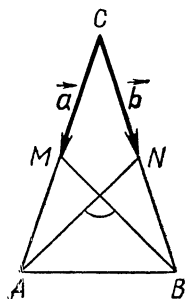


Рис. 369

через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\vec{CM}$ и $\vec{CN}$ (рис. 369).

Выразим векторы $\vec{BM}$ и $\vec{AN}$ через $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{BM} = \vec{BC} + \vec{CM} = -2\vec{b} + \vec{a};$$

$$\vec{AN} = \vec{AC} + \vec{CN} = -2\vec{a} + \vec{b}.$$

По условию векторы $\vec{BM}$ и $\vec{AN}$ ортогональны; следовательно,

$$(-2\vec{b} + \vec{a})(-2\vec{a} + \vec{b}) = 0.$$

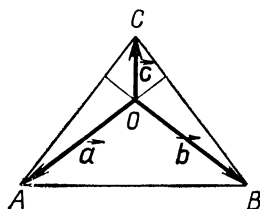


Рис. 370

Раскрывая скобки, находим: $5\vec{a}\vec{b} - 2\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 = 0$. Принимая во внимание, что $|\vec{a}| = l$ и $|\vec{b}| = l$, получаем:

$$5l^2 \cos n^\circ - 2l^2 - 2l^2 = 0,$$

где n° — величина угла C . Таким образом,

$$\cos n^\circ = \frac{4}{5} = 0,8.$$

По таблице находим:

$$n \approx 36,9^\circ.$$

Задача 3. Доказать, что высоты произвольного треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

Решение. Проведем через вершины A и B треугольника прямые, перпендикулярные сторонам BC и AC , обозначим точку пересечения этих прямых через O , а векторы, изображаемые направленными отрезками, идущими из точки O к вершинам треугольника, через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 370). Тогда $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b}$ и $\vec{CA} = \vec{a} - \vec{c}$. Так как $(OA) \perp (BC)$ и $(OB) \perp (CA)$, то

$$\vec{a}(\vec{c} - \vec{b}) = 0, \quad \vec{b}(\vec{a} - \vec{c}) = 0,$$

или

$$\vec{ac} = \vec{ab}, \quad \vec{ab} = \vec{bc}.$$

Следовательно, $\vec{ac} = \vec{bc}$, откуда $\vec{c}(\vec{b} - \vec{a}) = 0$, а это означает, что $\vec{OC} \cdot \vec{AB} = 0$, т. е. прямая OC перпендикулярна прямой AB .

Этим доказано, что третья высота проходит через точку пересечения первых двух высот.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) В каком месте при решении задачи 1 использовано, что $ABCD$ — параллелограмм?
- б) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при решении задачи 2 были выбраны так, что угол между ними равен величине угла C . Укажите, в каком месте решения задачи это было использовано.
- в) При решении задачи 3 из того, что $\vec{OC} \cdot \vec{AB} = 0$, был сделан вывод, что $(OC) \perp (AB)$. Этот вывод может быть сделан, если точки O и C не совпадают. Какой вид имеет треугольник, если точки O и C совпадают?

ЗАДАЧИ

577. В треугольнике ABC известны $|AC| = 8,1$; $|AB| = 12,5$ и $\hat{A} = 56^\circ$. Определите длину медианы AD .
 578. Докажите, что если в треугольнике две медианы конгруэнтны, то треугольник равнобедренный.
 579. Докажите, что если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.
 580. Докажите, используя свойства скалярного произведения, что диагонали ромба перпендикулярны.
 581. Докажите, что если в четырехугольнике сумма квадратов длин двух его противоположных сторон равна сумме квадратов длин двух других сторон, то диагонали четырехугольника перпендикулярны.
 582. Докажите, что в трапеции сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин боковых сторон, сложенной с удвоенным произведением длин оснований.
-
583. Докажите, что если в параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD конгруэнтны, то $ABCD$ — прямоугольник.
 584. Докажите, что угол C треугольника ABC будет острым, прямым или тупым в зависимости от того, будет ли длина медианы CD больше, равна или меньше $\frac{1}{2}|AB|$.
 585. Докажите, что если диагонали четырехугольника перпендикулярны, то сумма квадратов длин двух противоположных сторон равна сумме квадратов длин двух других сторон.

78. ВЫЧИСЛЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ В КООРДИНАТАХ

Теорема. Пусть вектор $\vec{a}$ имеет координаты x_1, y_1 , а вектор $\vec{b}$ — координаты x_2, y_2 , тогда

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Доказательство. Обозначим через $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ базисные векторы координатной системы. Мы имеем:

$$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2,$$

$$\vec{b} = x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \vec{a}\vec{b} &= (x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2)(x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2) = \\ &= x_1 x_2 \vec{e}_1 \vec{e}_1 + x_1 y_2 \vec{e}_1 \vec{e}_2 + y_1 x_2 \vec{e}_2 \vec{e}_1 + y_1 y_2 \vec{e}_2 \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Остается заметить, что $\vec{e}_1 \vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 \vec{e}_2 = 1$, $\vec{e}_1 \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \vec{e}_1 = 0$ (так как $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$).

Следствие. Пусть вектор $\vec{a}$ имеет координаты x, y . Тогда

$$\vec{a}^2 = x^2 + y^2.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ справедливы соотношения $\vec{e}_1 \vec{a} = x$, $\vec{e}_2 \vec{a} = y$, где x, y — координаты вектора $\vec{a}$.
- Пусть вектор $\vec{a}$ имеет координаты x_1, y_1 , а вектор $\vec{b}$ — координаты x_2, y_2 . Докажите, что если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны, то $x_1 x_2 = -y_1 y_2$.
- Докажите, что для любого угла n° справедливо соотношение $\sin^2 n^\circ + \cos^2 n^\circ = 1$.

ЗАДАЧИ

586. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют соответственно координаты x_1, y_1 и x_2, y_2 . Вычислите скалярное произведение:

$$(3\vec{e}_1 + \vec{e}_2)(2\vec{a} - \vec{b}).$$

587. Точки A, B, C имеют соответственно координаты $(-a; 0)$, $(b; 0)$, $(0; c)$, где числа a, b, c отличны от нуля. Докажите, что треугольник ABC будет прямоугольным в том и только в том случае, если $ab = c^2$.

588. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами:

а) $\vec{a}(5; 2); \quad \vec{b}(-3; 6);$

б) $\vec{a}(6; -8); \quad \vec{b}(12; 9).$

589. Определите длину отрезка AB в следующих случаях:

- а) $A(2; 3); \quad B(3; 1);$
 б) $A(-2; 5); \quad B(1; 9).$

590. Определите величину угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданными своими координатами:

- а) $\vec{a}(4; 3); \quad \vec{b}(1; 7);$
 б) $\vec{a}(2; 5); \quad \vec{b}(3; -7);$
 в) $\vec{a}(6; -8); \quad \vec{b}(12; 9).$

591. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами:

- а) $\vec{a}(-0,47; 1,62); \quad \vec{b}(2,03; 0,54);$
 б) $\vec{a}(4,1; 6,7); \quad \vec{b}(-79; -61).$

592. Вычислите длину отрезка MP по координатам его концов:

- а) $M(-2; -5); \quad P(3; 7);$
 б) $M(0,7; 3,6); \quad P(0; 1,2).$

593. Определите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданными своими координатами:

- а) $\vec{a}(-5; 12); \quad \vec{b}(8; -15);$
 б) $\vec{a}(3,9; 8); \quad \vec{b}(-9; 12).$

79. ВЕКТОР, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЙ ПРЯМОЙ

Из курса алгебры известно, что любая прямая на координатной плоскости задается уравнением первой степени.

Теорема 1. Пусть $ax+by+c=0$ — уравнение прямой l . Тогда вектор $\vec{n}$ с координатами a, b перпендикулярен прямой l .

Доказательство. Возьмем на прямой l две точки $M_0(x_0; y_0)$ и $M_1(x_1; y_1)$ (рис. 371). Теорема утверждает, что векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M_1}$ ортогональны, т. е. их скалярное произведение равно нулю.

Согласно теореме 3 п. 71 вектор $\overrightarrow{M_0M_1}$ имеет координаты $(x_1-x_0; y_1-y_0)$. Зная ко-

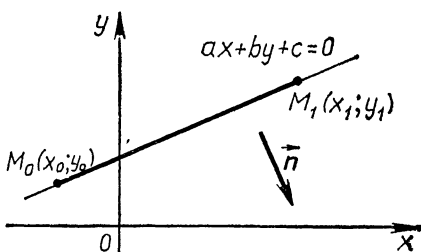


Рис. 371

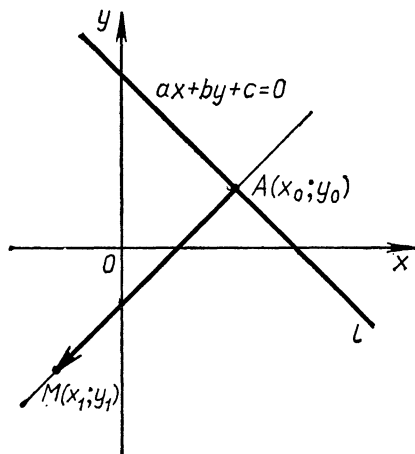


Рис. 372

ординаты $(a; b)$ вектора $\vec{n}$ и координаты $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ вектора $\overrightarrow{M_0 M_1}$, находим их скалярное произведение:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M_1} = a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0). \quad (1)$$

Таким образом, надо установить, что правая часть соотношения (1) равна нулю. Докажем это. Так как точка M_0 лежит на прямой l , то ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой, т. е.

$$ax_0 + by_0 + c = 0. \quad (2)$$

Из того, что $M_1 \in l$, следует аналогично

$$ax_1 + by_1 + c = 0. \quad (3)$$

Вычитая из соотношения (3) соотношение (2), получаем:

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = 0,$$

что и доказывает теорему.

Теорема 2. Пусть l — прямая, определяемая уравнением $ax + by + c = 0$. Обозначим через $\vec{n}$ вектор с координатами $(a; b)$. Тогда для любой точки $M(x_1; y_1)$ справедливо соотношение

$$|\vec{n}| \cdot d(M, l) = |ax_1 + by_1 + c|. \quad (4)$$

Доказательство. Проведем через M прямую, перпендикулярную l , и обозначим через $A(x_0; y_0)$ точку, в которой эта прямая пересекает l (рис. 372). Вектор $\overrightarrow{AM}$ имеет координаты $(x_1 - x_0; y_1 - y_0)$, и потому

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}.$$

Так как $A \in l$, то

$$ax_0 + by_0 + c = 0.$$

Складывая эти соотношения, получаем:

$$ax_1 + by_1 + c = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM}.$$

Наконец, заметим, что векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\vec{n}$ параллельны, т. е. угол θ° между ними равен 0° или 180° , и потому

$$|\vec{n} \cdot \vec{AM}| = |\vec{n}| \cdot |\vec{AM}| \cdot \cos m^\circ = |\vec{n}| \cdot |\vec{AM}| = |\vec{n}| d(M, l). \quad (6)$$

Сравнивая соотношения (5) и (6), получаем требуемое равенство (4).

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Найдите координаты вектора, перпендикулярного прямой $-2x + 3y + 4 = 0$. Сколько таких векторов существует?
- б) Координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ равны соответственно $(-6; 8)$, $(-3; 4)$, $(3; -4)$, $(12; 16)$. Какие из этих векторов перпендикулярны прямой $6x - 8y + 3 = 0$?
- в) Рассмотрим прямую l , определяемую уравнением $5x - 12y + 7 = 0$, и точку $M(0; 1)$. 1) Чему равна длина вектора $\vec{n}$, имеющего координаты $(5; -12)$? 2) Какое число получится, если вместо x, y подставить в левую часть уравнения прямой координаты точки M ? 3) Чему равно расстояние от точки M до прямой l ?

ЗАДАЧИ

594. Даны точки $A(-3; 2)$, $B(1; 4)$, $C(-7; 4)$. Какие из векторов $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$ перпендикулярны прямой $2x - y + 3 = 0$?
 595. Найдите векторы, перпендикулярные прямым $x + 2y - 7 = 0$ и $y = 2x - 5$. Какой угол составляют эти векторы? Какова величина угла между этими прямыми?
 596. Найдите векторы, перпендикулярные прямым $3x - 4y + 6 = 0$ и $12x + 5y + 8 = 0$. Найдите величину острого угла, образованного этими прямыми.
 597. Используя векторы, перпендикулярные к прямым, определите, какие из следующих пар прямых параллельны:
 - а) $4x - 6y - 50 = 0$ и $3y - 2x + 6 = 0$;
 - б) $8x - 4y - 12 = 0$ и $y = 2x - 3$.
 598. Найдите расстояние от точки $M(5; 1)$ до следующих прямых: а) $3x + 4y - 7 = 0$; б) $2x - 3y - 7 = 0$; в) $y = 2x - 1$.
-
599. Найдите величину тупого угла между следующими прямыми:
 - а) $4x + 3y + 2 = 0$ и $x - 5 = 0$;
 - б) $2x - 3y + 5 = 0$ и $4x + 6y - 7 = 0$.
 600. Даны прямые $3x - 4y + 3 = 0$; $8x - 15y + 3 = 0$. К какой из этих прямых точка $M(-1; 3)$ находится ближе?
 601. Определите расстояние между параллельными прямыми $8x - 15y + 2 = 0$ и $8x - 15y - 15 = 0$.

80. ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

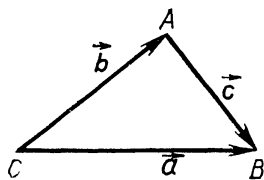


Рис. 373

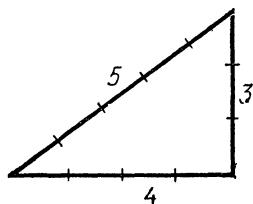


Рис. 374

Условимся через a обозначать длину стороны треугольника ABC , лежащей против угла A , через b — длину стороны, лежащей против угла B , через c — длину стороны, лежащей против угла C . Площадь треугольника ABC будем обозначать буквой S .

Теорема. $(\forall \triangle ABC) (c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C})$.

Доказательство. Обозначим через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторы, представителями которых являются направленные отрезки, идущие по сторонам треугольника (рис. 373); тогда

$$\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}.$$

При принятых обозначениях векторов угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\hat{C}$ и, следовательно,

$$c^2 = \vec{c}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}.$$

Доказанная теорема носит название *теоремы косинусов*.

Следствие. $(\forall \triangle ABC) (\hat{C} = 90^\circ) \Leftrightarrow (c^2 = a^2 + b^2)$.

В самом деле, если $\hat{C} = 90^\circ$, то $\cos \hat{C} = 0$, и из теоремы косинусов получаем $c^2 = a^2 + b^2$. Обратно, если $c^2 = a^2 + b^2$, то по теореме косинусов $2ab \cos \hat{C} = 0$, т. е. $\cos \hat{C} = 0$ и потому $\hat{C} = 90^\circ$.

Утверждение о том, что квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов, связано с именем древнегреческого ученого Пифагора (III — II вв. до н. э.) и называется *теоремой Пифагора*. Впрочем, некоторые ученые допускают, что Пифагор познакомился с формулировкой теоремы во время путешествий в другие страны, а ему принадлежит оригинальное доказательство этой теоремы. Тогда математики не владели понятием вектора и скалярного произведения и теорема эта доказывалась сложнее.

Прямоугольные треугольники, у которых длины всех сторон выражаются натуральными числами, называются *пифагоровыми треугольниками*. Треугольник на рисунке 374 является пифагоровым (так как $5^2 = 4^2 + 3^2$, то величина одного из его углов равна 90°). Этот треугольник называется «египетским», поскольку в Древнем Египте его использовали для построения прямых углов на местности.

В древности пифагоровым треугольникам придавали особое значение, иногда приписывали им волшебные, мистические свойства. В настоящее время известно, что множество пифагоровых треугольников бесконечно и имеются формулы, позволяющие найти любой из них. Вот несколько примеров пифагоровых треугольников:

$$a = 6, \quad b = 8, \quad c = 10;$$

$$a = 5, \quad b = 12, \quad c = 13;$$

$$a = 8, \quad b = 15, \quad c = 17;$$

$$a = 7, \quad b = 24, \quad c = 25.$$

Задача. Доказать, что

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

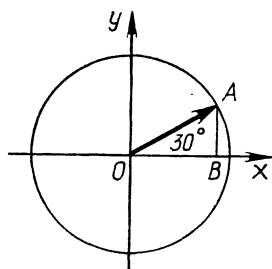


Рис. 375

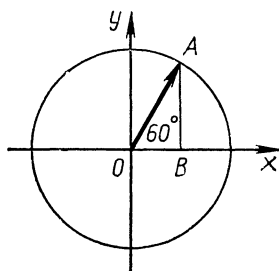


Рис. 376

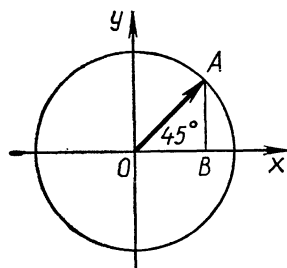


Рис. 377

Решение. Обозначим через $\vec{a}$ вектор, получающийся из $\vec{e}_1$ поворотом на 30° . В треугольнике OAB длина катета AB равна половине длины гипотенузы, т. е. $|AB| = \frac{1}{2}$ (рис. 375). Далее, по теореме Пифагора $|OB|^2 = |OA|^2 - |AB|^2 = \frac{3}{4}$, т. е. $|OB| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Таким образом, вектор $\vec{a}$ имеет координаты $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, т. е. $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Аналогично доказываются соотношения $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ и $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 376).

Наконец, если вектор $\vec{a} = \vec{OA}$ получается из $\vec{e}_1$ поворотом на 45° , то $|OB| = |AB|$ (рис. 377), т. е. $x = y$, и потому по теореме Пифагора $2x^2 = 1$. Таким образом, $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

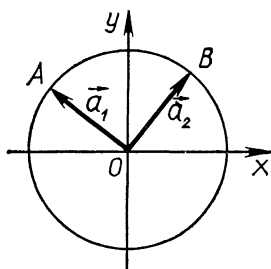


Рис. 378

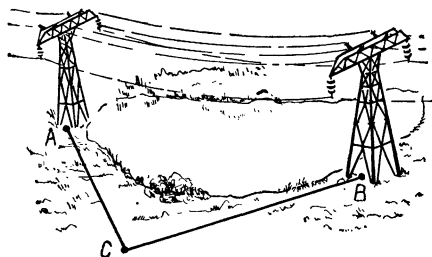


Рис. 379

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) В треугольнике ABC сторона c наибольшая. Что можно сказать о виде треугольника, если: 1) $c^2 > a^2 + b^2$; 2) $c^2 = a^2 + b^2$; 3) $c^2 < a^2 + b^2$?
- б) Единичные векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ (рис. 378) имеют координаты x_1, y_1 и x_2, y_2 . Докажите, что $|AB|^2 = 2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2)$.

ЗАДАЧИ

602. Найдите длину третьей стороны треугольника ABC по следующим данным:
а) $b = 23,5$; $c = 38,8$; $\hat{A} = 63,7^\circ$;

б) $a = 0,628$ м; $c = 0,412$ м; $\hat{B} = 160,5^\circ$;

в) $a = c = 14,8$ см; $\hat{B} = 120^\circ$;

г) $b = 45$ дм; $c = 53$ дм; $\hat{C} = 90^\circ$;

д) $a = 8,5$ см; $c = 13,2$ см; $\hat{C} = 90^\circ$.

603. Длины сторон треугольника ABC равны 8 см, 5 см и 10 см. Найдите величины углов этого треугольника.

604. Для измерения расстояния между опорами высоковольтных вышек A и B (рис. 379) выбран пункт C и измерены $|CA| = 73,2$ м, $|CB| = 68,1$ м и $\hat{ACB} = 72,5^\circ$. Определите $|AB|$.

605. Длины сторон параллелограмма равны 7,1 см и 10,8 см, величина одного из углов равна $110,3^\circ$. Найдите длины диагоналей параллелограмма.

606. Лестница длиной 13 м прислонена к стене дома. Ее нижний конец отстоит на 50 дм от основания стены. На какой высоте находится ее другой конец?

607. Докажите, что длина стороны правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса R , равна $R \sqrt{2 \left(1 - \cos \frac{360^\circ}{n}\right)}$. Вычислите длины сторон правильного треугольника, четырехугольника и шестиугольника.

608. Сторона правильного шестиугольника имеет длину a . Вычислите длины его диагоналей.

609. В окружности проведены радиусы OA и OB так, что $\widehat{AOB} = 52^\circ$. Найдите длину хорды AB , если длина радиуса равна 7,04 см.
610. Длина стороны ромба равна 7,6 см, а величина одного из его углов равна $108,6^\circ$. Найдите длины диагоналей ромба.
611. Определите площадь равнобедренного треугольника, основание которого имеет длину 10 см, а боковая сторона 13 см.
612. Длина стороны квадрата равна a . Вычислите длины его диагоналей.

81. ТЕОРЕМА СИНУСОВ

Теорема 1. $(\forall \triangle ABC) \left(S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} \right)$.

Доказательство. С помощью движения поместим треугольник ABC так, чтобы точка C попала в начало координат, точка B лежала на положительной полуоси абсцисс, а точка A — в верхней полуплоскости (рис. 380). Из точки A проведем высоту; длину ее обозначим через h_a .

Угол между векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{CA}$ равен $\hat{C}$. Следовательно, ордината y вектора $\vec{CA}$ равна $b \sin \hat{C}$, т. е. $h_a = b \sin \hat{C}$. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}.$$

Теорема 2. $(\forall \triangle ABC) \left(\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \right)$.

Доказательство. Из формулы площади находим:

$$\sin \hat{C} = \frac{2S}{ab},$$

откуда

$$\frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{abc}{2S}.$$

Аналогично находим:

$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{abc}{2S} \text{ и } \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{abc}{2S},$$

откуда и вытекает справедливость теоремы.

Доказанную теорему часто называют *теоремой синусов*.

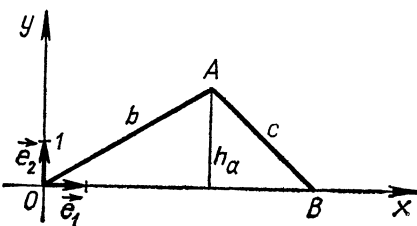


Рис. 380

- а) Докажите, что площадь параллелограмма $ABCD$ можно вычислить по формуле $S = |AB| |AD| \sin \hat{A}$.
 б) Докажите, что

$$(\forall \triangle ABC) (\hat{C} = 90^\circ) \Rightarrow (a = c \sin \hat{A}).$$

ЗАДАЧИ

613. Вычислите площадь треугольника по следующим данным:

- а) $a = 58,5$; $b = 76,2$; $\hat{C} = 53^\circ$;
 б) $a = c = 6,08$; $\hat{B} = 120,4^\circ$;
 в) $b = 2,02$; $c = 11,8$; $\hat{A} = 17,3^\circ$.

614. Вычислите площадь ромба, длина стороны которого равна 0,305 м, а величина одного из углов равна $61,9^\circ$.

615. а) Докажите, что площадь правильного треугольника, вписанного в круг радиуса R , равна $\frac{3R^2 \sqrt{3}}{4}$.

б) Докажите, что площадь правильного шестиугольника, вписанного в круг радиуса R , равна $\frac{3R^2 \sqrt{3}}{2}$.

в) Докажите, что площадь правильного четырехугольника, вписанного в круг радиуса R , равна $2R^2$.

616. Определите (если возможно) углы треугольника по следующим данным:

- а) $a = 2,1$; $b = 0,9$; $\hat{A} = 43^\circ$;
 б) $b = 4,1$; $c = 3,9$; $\hat{C} = 58,3^\circ$;
 в) $\hat{A} = 70,6^\circ$; $b = 10,1$; $a = 6,1$;
 г) $a = 1$; $b = 2,1$; $\hat{C} = 60^\circ$.

617. Длина диагонали прямоугольника равна 0,59 дм, величина угла между диагоналями равна 32° . Вычислите длины сторон прямоугольника.

618. Докажите, что площадь правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса R , равна $S = \frac{nR^2}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}$.

619. Площадь треугольника ABC равна $30,2 \text{ см}^2$, $|AB| = 8,1 \text{ см}$; $|AC| = 9,3 \text{ см}$. Определите $\hat{A}$.

620. В окружности радиуса 6,4 см проведена хорда длиной 7,6 см. Определите расстояние от центра окружности до хорды.

621. Докажите, что длины сторон правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса R , равна $a = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$.

82. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Решением треугольника называется нахождение всех его элементов (длин сторон и величин углов), если известны три из них. Рассмотрим основные случаи решения треугольников.

1. Известны длины всех трех сторон треугольника. В этом случае для нахождения величин углов можно воспользоваться теоремой косинусов:

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

2. Известны длина одной стороны треугольника и величины двух прилежащих к ней углов.

Пусть, например, известны c , $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Прежде всего

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}).$$

Для нахождения длин сторон a и b можно воспользоваться теоремой синусов. В самом деле, из равенств

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

находим:

$$a = \frac{c \sin \hat{A}}{\sin \hat{C}}, \quad b = \frac{c \sin \hat{B}}{\sin \hat{C}}.$$

3. Известны длины двух сторон треугольника и величина угла, заключенного между ними.

Пусть, например, даны a , b и $\hat{C}$. По этим данным можно определить длину стороны c :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}.$$

После этого по теореме косинусов находим:

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Величины углов A и B находятся теперь по таблице косинусов (впрочем, можно найти только один из этих углов, а второй определить на основании того, что сумма величин углов треугольника равна 180°).

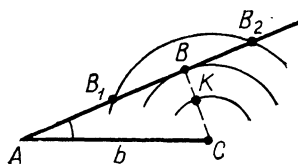


Рис. 381

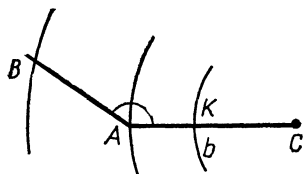


Рис. 382

Замечание. Иногда встречаются и другие случаи решения треугольников. Например, может случиться, что заданными элементами будут длина стороны, площадь и величина угла и т. п. Разумеется, если заданные элементы не определяют остальные элементы треугольника *однозначно*, то задача «Решить треугольник» по этим элементам имеет несколько решений. Например, задача «Решить треугольник по заданным трем его углам» имеет бесконечно много решений (любой треугольник, подобный искомого, имеет те же углы).

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Решая треугольник по данным $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$, $\hat{B} = 45^\circ$, ученик применил теорему синусов: $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$, откуда $\frac{\sqrt{3}}{\sin \hat{A}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}$, т. е. $\sin \hat{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Далее, он заключил, что $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 75^\circ$. Все ли он сделал верно?
- б) Используя данные задачи, ученик для определения угла $\hat{A}$ в треугольнике ABC имеет возможность вычислить либо $\sin \hat{A}$, либо $\cos \hat{A}$. Что предпочтительнее и почему?
- в) Известны a , b и $\hat{A}$. Однозначно ли можно решить треугольник по этим данным, если: 1) $\hat{A} < 90^\circ$ (см. рисунок 381); 2) $\hat{A} \geq 90^\circ$ (см. рисунок 382).

ЗАДАЧИ

622. Решите треугольник по следующим данным:

- а) $a = 18$; $b = 24$; $c = 13$;
 б) $a = 153$; $b = 117$; $c = 134$.

623. Решите треугольник по следующим данным:

- а) $a = 54,2$; $\hat{B} = 41,1^\circ$; $\hat{C} = 73,5^\circ$;
 б) $b = 31,2$; $\hat{A} = 124,7^\circ$; $\hat{B} = 18^\circ$;
 в) $a = 3,3$; $\hat{A} = 69,7^\circ$; $\hat{C} = 90^\circ$;
 г) $b = 11,8$; $\hat{A} = 33,2^\circ$; $\hat{C} = 90^\circ$;
 д) $c = 10,4$; $\hat{A} = 12,8^\circ$; $\hat{C} = 90^\circ$.

624. Решите треугольник по следующим данным:

а) $a = 118$; $b = 92$; $\hat{C} = 58,6^\circ$;

б) $a = b = 0,576$; $\hat{B} = 74,2^\circ$.

625. Решите треугольник по следующим данным:

$$h_a = 2,71; \quad \hat{B} = 128,2^\circ; \quad \hat{C} = 15,2^\circ.$$

626. Определите площадь треугольника по следующим данным:

а) $a = 4$; $b = 5$; $c = 7$;

б) $a = 25$; $b = 29$; $c = 36$.

627. Решите треугольник по следующим данным:

$$a = 5,41; \quad b = 7,14; \quad c = 6,28.$$

628. Вычислите длины сторон треугольника по следующим данным:

$$a = 25,4; \quad \hat{B} = 27,4^\circ; \quad \hat{C} = 69,7^\circ.$$

629. Решите треугольник по следующим данным:

$$a = b = 31,2; \quad \hat{A} = 58,1^\circ.$$

630. Решите треугольник по следующим данным:

$$S = 15,8; \quad a = 3,25; \quad \hat{B} = 86,2^\circ.$$

83. АКСИОМЫ ЕВКЛИДА

Первоначальные геометрические сведения дошли до нас из глубокой древности. Например, формулы для вычисления площадей земельных участков, имеющих форму прямоугольника, треугольника, трапеции, встречаются в древнеегипетском папирусе Ринда, датированном третьим тысячелетием до н. э., в клинописных таблицах Древнего Вавилона и других культурных памятниках древности.

Геометрические понятия возникли в результате многократного наблюдения реальных предметов той или иной формы. Об этом свидетельствует происхождение применяющихся в геометрии терминов. Например, термин «трапеция» происходит от древнегреческого слова *τραπέσιον* (читается «трапезион») — столик (рис. 383), термин «линия» — от латинского *linum* — лен, льняная нить.

Опытное происхождение первоначальных геометрических фактов подтверждается тем, что в древних источниках упоминаются как верные, так и неточные сведения. Например, древние египтяне вычисляли площадь произвольного четырехугольника с последовательными сторонами a, b, c, d по формуле $S = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$, что дает неверный результат даже для параллелограммов, отличных от прямоугольников. По-видимому, на практике встречались лишь четырехугольники, имеющие близкую к прямоугольнику форму, а для них вносимая этой формулой погрешность невелика.

Получение новых геометрических фактов при помощи *рассуждений* (доказательств) относится к VI в. до н. э. и связано с именем древнегреческого математика *Фалеса*. Ему приписывают установление свойств равнобедренного треугольника, доказательство конгруэнтности вертикальных углов, доказательство того, что вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой и т. д. Фалес, по-видимому, применял поворот части фигуры и перегибание чертежа, т. е. то, что мы сейчас называем движениями.

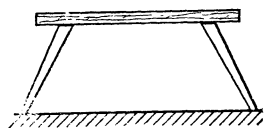


Рис. 383

Постепенно доказательства приобретают в геометрии все большее значение. К III в. до н. э. геометрия становится *де-*

дуктивной наукой, т. е. наукой, в которой подавляющее большинство фактов устанавливается путем вывода, доказательства. К этому времени относится книга «Начала», написанная древнегреческим ученым *Евклидом*. В ней доказываются свойства параллелограммов и трапеций, теорема Пифагора, изучается подобие многоугольников и т. д. Точка зрения Евклида была примерно следующей. Взяв какую-либо теорему, можно проследить, какие ранее доказанные теоремы были использованы при ее выводе. Для этих ранее доказанных теорем в свою очередь можно выделить те более простые факты, из которых она выводится, и т. д. В конце концов получается некоторый список простых фактов (аксиом), которые, во-первых, позволяют, идя обратным путем, доказать, исходя из них, все изучаемые теоремы геометрии и которые, во-вторых, настолько просты, что не возникает вопроса о необходимости их вывода.

Среди сформулированных Евклидом аксиом имеются, например, следующие:

«Через две точки можно провести прямую».

«Совмещающиеся между собой фигуры равны».

«Порознь равные третьему равны между собой».

«Пусть в плоскости дана прямая и лежащая вне этой прямой точка; тогда через эту точку можно провести в плоскости не более одной прямой, которая не пересекается с данной».

Формулировка первой из этих аксиом понятна. Вторая из указанных аксиом говорит о том, что две фигуры, совмещающиеся между собой (подразумевается: при помощи движения), конгруэнтны. (Евклид не пользовался термином «конгруэнтность», а говорил о «равных» фигурах). Третья из указанных аксиом имеет общематематический характер, т. е. она относится не только к геометрическим фигурам, но также, например, к числам (если $a = c$ и $b = c$, то $a = b$). Четвертая из рассмотренных аксиом называется *аксиомой параллельности* (у Евклида она формулировалась сложнее).

С понятиями геометрии дело обстоит примерно так же, как с теоремами. Каждое новое понятие вводится (с помощью определения) на основе ранее введенных понятий. Эти ранее введенные понятия в свою очередь определяются через предыдущие и т. д. В конце концов мы приходим к небольшому числу *первоначальных понятий*, через которые, идя обратным путем, можно определить все встречающиеся в курсе геометрии понятия. Евклид попытался дать определение всех без исключения понятий геометрии, в том числе и первоначальных. Например, «точка», относящаяся к числу первоначальных понятий, определяется у Евклида следующим образом: «Точка есть то, что не имеет частей». Здесь, однако, непонятно, какой смысл имеет слово «то». Что такое «часть»? Что означает «иметь часть»? Неудивительно, что это туманное «определение» нигде дальше в изложении Евклида не используется. По существу фраза

Евклида представляет собой обращение к нашему жизненному опыту: Евклид убежден, что читатель имеет представление о чем-то предельно маленьком, неделимом далее и предлагает это понятие именовать термином «точка». Таким образом, следует признать, что у Евклида понятие «точка» является первоначальным, вводимым без определения, а фраза Евклида является лишь пояснением, показывающим опытное происхождение этого понятия.

Евклид не сумел последовательно и до конца провести аксиоматическую точку зрения. Дело не только в том, что он не отделил первоначальные неопределяемые понятия от последующих понятий. Основной недостаток изложения Евклида заключается в том, что приведенный им список аксиом был *неполным*.

После Евклида многие поколения математиков стремились улучшить данную им *систему аксиом* (или, как еще говорят, *аксиоматику*) геометрии. Большую роль сыграли работы современника Евклида, древнегреческого ученого Архимеда, который сформулировал аксиомы, относящиеся к измерению геометрических величин. Из математиков более позднего времени существенный вклад в усовершенствование аксиоматики геометрии внесли замечательный русский математик Н. И. Лобачевский, а также А. Лежандр, М. Паш, Д. Гильберт и другие ученые.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Условимся обозначать через P множество всех точек плоскости, а через L — множество всех прямых. Прочтите словами следующие две аксиомы (первая из них сформулирована Евклидом, вторая входит в аксиоматику Гильберта):

- 1) $(\forall A, B \in P, \text{ где } A \neq B) (\exists l \in L) (A \in l \wedge B \in l)$;
- 2) $(\exists A, B, C \in P) (\forall l \in L) (A \notin l \vee B \notin l \vee C \notin l)$.

- б) Понятие *между* (точка A лежит *между* B и C на некоторой прямой) принадлежит к числу первоначальных неопределяемых понятий геометрии. Однако у Евклида нет *ни одной* аксиомы, в которой что-либо говорилось бы об этом понятии. В связи с этим три ученика сделали следующие три высказывания:

Первый. Так как все выводится из аксиом, а ни в одной из них понятие «между» не упоминается, то Евклид не мог доказать ни одной теоремы, в формулировке которой используется это понятие.

Второй. А по-моему, Евклид постоянно пользуется этим понятием. Если в прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла опустить высоту CD на гипотенузу, то D лежит *между* A и B . Не мог же Евклид не знать этого!

Третий. Это лишь означает, что список аксиом Евклида неполный, а в своих доказательствах он исходил не только из аксиом, но и из повседневного опыта (или из того, что «очевидно» из чертежа).

С кем из них вы склонны согласиться?

84. ПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ

Полный список аксиом геометрии содержит около двух десятков аксиом и является достаточно сложным. Поэтому первое знакомство с аксиоматическим методом проведем на более простых примерах.

Несколько восьмиклассников решили организовать шахматный турнир. Однако при обычной системе (когда каждый участник играет с каждым из остальных и притом по две партии — белыми и черными) требуется очень много времени для проведения турнира. Поэтому мальчики решили провести турнир по упрощенной системе: каждый должен сыграть ровно три партии с кем-либо из остальных участников (а белыми или черными — по жребию). Так как составить расписание турнира никак не удавалось, двое из участников, Петя и Сережа, решили обратиться к учителю.

Учитель прежде всего поинтересовался, четно или нечетно число участников предполагаемого турнира. Оказалось, что число игроков нечетно. Тогда учитель предложил сформулировать требования, которые ученики предъявили к турниру, в виде аксиом. Для этого потребовалось ввести три первоначальных (неопределяемых) понятия: «игрок», «партия», «участие игрока в партии». Аксиом получилось четыре:

Аксиома 1. Число игроков нечетно.

Аксиома 2. Каждый игрок участвует в трех партиях.

Аксиома 3. В каждой партии участвуют два игрока.

Аксиома 4. Для каждого двух игроков имеется не более одной партии, в которой они оба участвуют.

Из этих аксиом можно вывести ряд теорем. Первую из них предложил для примера сам учитель.

Теорема 1. *Число игроков не меньше пяти.*

Доказательство. Так как нуль — четное число, то по аксиоме 1 число игроков не равно нулю, т. е. существует хотя бы один игрок A . Этот игрок в силу аксиомы 2 участвует в трех партиях, причем в каждой из этих партий, кроме A , участвует еще один игрок (аксиома 3). Пусть B, C, D — игроки, отличные от A , которые участвуют в этих партиях. По аксиоме 4 все игроки B, C, D различны (если бы, например, было $B=C$, то оказалось бы, что имеются две партии, в которых участвуют игрок A и игрок $B=C$). Итак, мы уже нашли че-

тырех игроков: A, B, C, D . Но тогда по аксиоме 1 число игроков не меньше пяти.

Следующую теорему доказал Петя. Для этого он определил новое понятие: если q — некоторая партия и A — один из участвующих в ней игроков, то пару (q, A) назовем *выступлением игрока*.

Теорема 2. Число всех выступлений игроков четно.

Доказательство. Если в партии q участвуют игроки A и B , то мы получаем два выступления игроков: (q, A) и (q, B) , т. е. каждая партия дает ровно два выступления игроков (аксиома 3). Значит, число всех выступлений игроков четно, так как оно вдвое больше числа всех партий. Однако Сережа доказал теорему, противоречащую предыдущей:

Теорема 3. Число всех выступлений игроков нечетно.

Доказательство. По аксиоме 2 игрок участвует ровно в трех партиях, скажем q_1, q_2, q_3 . Это дает три выступления игрока: (q_1, A) , (q_2, A) и (q_3, A) . Отсюда следует, что число всех выступлений игроков равно $3n$, где n — число игроков. Так как n нечетно (аксиома 1), то и $3n$ нечетно.

Учитель подвел итоги проведенного исследования. Взятая аксиоматика позволяет доказать ряд теорем (три из них были рассмотрены). Однако среди этих теорем имеются две, противоречащие друг другу: теорема 2 утверждает, что некоторое число *четно*, а теорема 3 гласит, что то же самое число *нечетно*. Аксиоматика, из которой можно вывести две противоречащие друг другу теоремы, называется *противоречивой*. Таким образом, взятая аксиоматика противоречива, т. е. требования, выдвинутые организаторами турнира, несовместимы. Неудивительно, что мальчики не сумели составить расписание турнира: такого расписания просто не существует.

Противоречивая аксиоматика не может служить основой построения содержательной теории. «Теория», основанная на противоречивой аксиоматике, считается несостоятельной, бессодержательной. Математика такие «теории» отвергает.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) С какими из следующих высказываний вы согласны: 1) если из аксиоматики выведен ряд теорем, причем среди них есть две теоремы, противоречащие друг другу, то аксиоматика противоречива; 2) если из аксиоматики выведено много теорем и среди них нет противоречащих друг другу, то аксиоматика непротиворечива; 3) если аксиоматика непротиворечива, то, сколько бы теорем мы ни выводили из этой аксиоматики, среди них не будет теорем, противоречащих друг другу.

85. НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ И ПОНЯТИЕ МОДЕЛИ

Учитель предложил Пете и Сереже другую систему организации турнира, при которой каждый из участников должен сыграть не три, а *четыре* партии с кем-либо из остальных участников. Иначе говоря, он предложил рассмотреть «теорию», в которой те же первоначальные понятия (*игрок, партия и участие* игрока в партии), а аксиомы формулируются следующим образом:

Аксиома 1. Число игроков нечетно.

Аксиома 2. Каждый игрок участвует в четырех партиях.

Аксиома 3. В каждой партии участвуют два игрока.

Аксиома 4. Для каждого двух игроков имеется не более одной партии, в которой они оба участвуют.

Однако Петя и Сережа не спешили выводить теоремы из этих аксиом: вдруг опять обнаружится противоречие. Учитель же заверил мальчиков, что, сколько бы теорем они ни выводили из этих аксиом, никогда противоречий не будет. Вот как он убедил их в этом.

Рассмотрим девятиугольник (рис. 385), в котором, кроме сторон, проведем девять диагоналей, соединяющих вершины через одну. Вершины девятиугольника будем считать «игроками», проведенные отрезки (стороны и диагонали) будем считать «партиями», а «игроками», участвующими в некоторой «партии», будем считать концы соответствующего отрезка. Мы получаем модель (или схему) интересующего нас турнира. Легко проверяется, что все четыре аксиомы здесь выполняются. Итак, удастся построить модель, в которой выполняются все рассматриваемые аксиомы, причем эта модель построена из «материала» геометрии, т. е. науки, в непротиворечивости которой мы не сомневаемся.

Предположим теперь, что из рассматриваемых четырех аксиом можно вывести две теоремы, противоречащие друг другу. Тогда доказательства этих теорем можно было бы повторить и в построенной модели (ведь в этой модели все четыре аксиомы имеют место). В результате получилось бы, что, рассуждая о правильном девятиугольнике, мы можем получить две противоречащие друг другу теоремы. Но это означало бы, что *геометрия* — наука противоречивая, чего мы не допускаем. Таким образом, мы

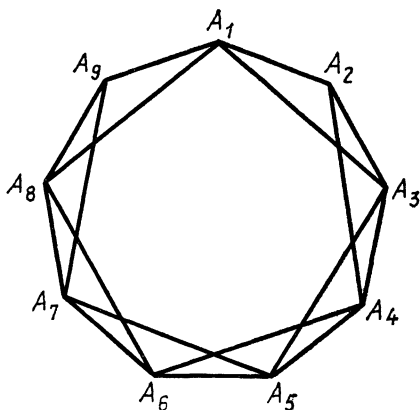


Рис. 384

должны признать, что двух противоречащих друг другу теорем вывести из рассматриваемых четырех аксиом невозможно.

Вообще, пусть рассматриваются две теории P и Q , причем теория P задается аксиоматически (и в ее непротиворечивости мы заранее не уверены), а Q — это хорошо известная нам теория, в непротиворечивости которой мы не сомневаемся. Если из «материала» теории Q удастся построить *модель*, в которой выполняются все аксиомы теории P , то этим непротиворечивость теории P считается установленной.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Имеются три первоначальных понятия: *ученик*, *одинаковая успеваемость* (когда речь идет о двух учениках) и *лучшая успеваемость*. Одинаковую успеваемость учеников A и B условимся обозначать записью $A \approx B$, а если A имеет лучшую успеваемость, чем B , то будем писать $A > B$. Наконец, введем еще одно (определяемое) понятие: A и B *сравнимы по успеваемости*:

$$(\forall A, B) (A \text{ и } B \text{ сравнимы по успеваемости}) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \stackrel{\text{def}}{(\exists A \approx (B \vee A) > (B \vee B) > A)}.$$

Докажите, что следующая аксиоматика непротиворечива:
Аксиома 1. Имеется 40 учеников.

Аксиома 2. Для любых двух учеников A и B имеет место не более чем *одно* из соотношений $A \approx B$, $A > B$, $B > A$.

Аксиома 3. Любые два ученика сравнимы по успеваемости.

- б) В рассмотренной только что аксиоматике можно аксиому 3 записать кратко в виде: $(\forall A, B) (A \text{ сравн. } B)$. Отрицание этой аксиомы имеет вид $(\exists A, B) \neg (A \text{ сравн. } B)$, т. е. существуют два ученика, которые несравнимы по успеваемости. Докажите, что если заменить аксиому 3 ее отрицанием, то снова получится непротиворечивая аксиоматика:

Аксиома 1. Имеется 40 учеников.

Аксиома 2. Для любых двух учеников A и B имеет место не более, чем *одно* из соотношений $A \approx B$, $A > B$, $B > A$.

Аксиома 3. Существуют два ученика, которые несравнимы по успеваемости.

Для построения модели используйте только два предмета (алгебра и геометрия) и только четыре оценки (2, 3, 4, 5).

Аксиома параллельности—наиболее сложная из аксиом Евклида. Многие теоремы Евклида (например, в равнобедренном треугольнике углы при основании конгруэнтны) выражают гораздо более простые факты. Неудивительно, что многие математики, жившие после Евклида, пытались доказать, что эта аксиома является лишней, т. е. может быть доказана как *теорема* на основании остальных аксиом. Существует ли такое доказательство? Эта проблема оставалась открытой свыше 2000 лет после Евклида. Заслуга ее решения принадлежит нашему соотечественнику, профессору Казанского университета Николаю Ивановичу Лобачевскому (1792—1856).

Рассмотрим в плоскости прямую a и проведем из точки $A \notin a$ перпендикуляр AC к прямой a и луч AB , перпендикулярный $[AC]$ (рис. 385). Возьмем некоторую прямую AM , пересекающую a в точке M . При неограниченном удалении точки M по прямой a прямая AM будет приближаться к некоторому предельному положению (AN). Логически могут представиться две возможности: 1) луч AN совпадает с лучом AB ; 2) луч AN составляет с лучом AB некоторый *острый* угол. Первый случай соответствует аксиоме параллельности: (AB) —единственная проходящая через A прямая, не пересекающая a .

Допуская, что имеет место второй случай (рис. 386), Лобачевский начал выводить различные следствия из этого допущения, надеясь, что рано или поздно он придет к противоречию, чем и завершится доказательство. Однако он доказал много десятков теорем, не обнаружив логических противоречий. И тогда Лобачевскому пришла в голову гениальная догадка: заменив аксиому параллельности ее отрицанием (т. е. предположив, что через точку $A \notin a$ можно провести более одной прямой, не пересекающей a) и сохранив все остальные аксиомы, мы получаем *новую геометрию* (Лобачевский назвал ее «воображаемой»).

Все теоремы, доказываемые в евклидовой геометрии без использования аксиомы параллельности, сохраняются и в геометрии Лобачевского. Например, вертикальные углы конгруэнтны; углы при основании равнобедренного треугольника конгруэнтны; из данной точки можно опустить на данную прямую только один перпендикуляр. Теоремы же, при доказательстве которых применяется аксиома параллельности, в геометрии Лобачевского видоизменяются. Первой теоремой, при доказательстве которой использовались свойства параллельных прямых,

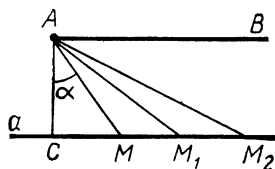


Рис. 385

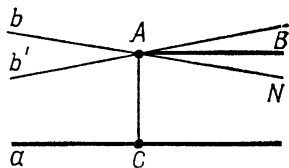


Рис. 386

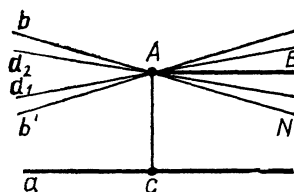


Рис. 387

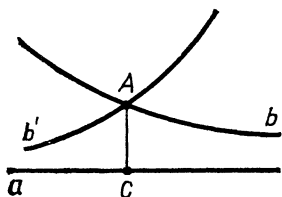


Рис. 388

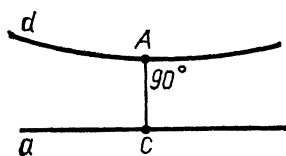


Рис. 389

была теорема о сумме величин углов треугольника (5 класс). Здесь ожидает нас первый «сюрприз»: в геометрии Лобачевского *сумма величин углов любого треугольника меньше 180°* .

Если два угла одного треугольника соответственно конгруэнтны двум углам другого, то в евклидовой геометрии конгруэнтны и третьи углы; как известно из курса 7 класса, такие треугольники подобны. В геометрии Лобачевского *не существует* подобных треугольников (не конгруэнтных между собой): если углы двух треугольников соответственно конгруэнтны, то в геометрии Лобачевского эти треугольники конгруэнтны.

Разность $180^\circ - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})$ называется *дефектом* треугольника ABC . В геометрии Лобачевского *площадь треугольника пропорциональна дефекту*, т. е. $S = k(180^\circ - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C})$, где k зависит от выбора единицы измерения площадей.

Термин «параллельные» Лобачевский применяет не к любым двум непересекающимся прямым, а лишь к таким прямым, как a и b на рисунке 386. Другие же пары непересекающихся прямых он называет *расходящимися* (прямые a и d_1 на рис. 387).

В геометрии Лобачевского параллельные прямые неограниченно сближаются между собой в направлении параллельности и неограниченно удаляются друг от друга в противоположном направлении (как искривленные линии на рис. 388).

Далее, две прямые в том и только том случае являются расходящимися, если они имеют общий перпендикуляр (рис. 389). Заметим, что двух общих перпендикуляров две прямые иметь не могут: ведь в геометрии Лобачевского сумма величин углов четырехугольника меньше 360° , и потому не существует прямоугольников.

Математический мир не сразу воспринял идеи Лобачевского. Ученые не были подготовлены к мысли о том, что может существовать геометрия, отличная от евклидовой. Мужественно отстаивая правоту своих идей, Лобачевский опубликовал ряд книг и статей об открытой им геометрии. Он умер в 1856 г., так и не добившись признания своих идей.

Были, однако, два человека, которые не только поняли Лобачевского при его жизни, но и делят с ним заслугу открытия неевклидовой геометрии. Это были венгерский математик Я. Бойяй

(1802—1860) и «король математики» К. Ф. Гаусс (1777—1855). Работа Я. Бойяй, в которой он излагал идеи новой геометрии несколько иначе и не столь полно, вышла на несколько лет позже первой книги Лобачевского. Впоследствии Я. Бойяй узнал о трудах Лобачевского и специально изучал русский язык, чтобы их прочитать. Непризнание и мысль, что Лобачевский опередил его в этом открытии, сломили душевные силы Я. Бойяй; жизнь его была недолгой.

То, что Гаусс владел идеями неевклидовой геометрии, было обнаружено лишь после смерти ученого, при изучении его архива. Гениальный Гаусс, к мнениям которого прислушивались все, не рискнул опубликовать свои работы или выступить в поддержку Н. И. Лобачевского. Свое отношение к научному подвигу русского ученого он выразил тем, что добился избрания Н. И. Лобачевского членом-корреспондентом Геттингенского королевского научного общества. Это единственная научная почесть, выпавшая на долю Лобачевского при жизни.

Признание открытия Лобачевского пришло во второй половине XIX в., после появления работ итальянского математика Е. Бельтрами (1835—1900), английского математика А. Кэли (1821—1895), немецкого математика Ф. Клейна (1849—1925), французского математика А. Пуанкаре (1854—1912). Каждый из них построил *модель* геометрии Лобачевского из материала геометрии Евклида. Тем самым было установлено, что геометрия Лобачевского так же непротиворечива, как и евклидова.

Открытие, сделанное Лобачевским, сыграло огромную роль в развитии математики и физики.

Во-первых, его работами была полностью решена волновавшая математиков проблема: *евклидова аксиома параллельности не может быть доказана, исходя из остальных аксиом геометрии*. Иными словами, аксиома параллельности является *независимой* от остальных аксиом геометрии.

Во-вторых, работы Лобачевского показали, что геометрия Евклида не является единственно возможной. Это оказало большое революционизирующее влияние на все дальнейшее развитие математики. В настоящее время в математике рассматривается бесконечно много различных геометрий.

В-третьих, оказалось, что взаимосвязь *пространства и времени*, открытая Эйнштейном в его специальной теории относительности, очень точно описывается геометрией Лобачевского. Например, в расчетах современных синхрофазотронов используются формулы геометрии Лобачевского.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Является ли аксиома 3, сформулированная в вопросе а) п. 85, независимой от остальных аксиом?
- б) Вспомните, использовались ли при доказательстве следую-

щих теорем свойства параллельных прямых. Какие из них справедливы в геометрии Лобачевского: 1) равнобедренный треугольник имеет ось симметрии; 2) любая прямая, проходящая через центр окружности, является осью симметрии этой окружности; 3) сумма величин углов выпуклого многоугольника равна $180^\circ(n-2)$; 4) если из одной точки провести к прямой перпендикуляр и наклонную, то длина перпендикуляра меньше длины наклонной?

- в) Лобачевский сделал попытку вычислить сумму углов огромного космического треугольника, две вершины которого находятся в противоположных точках земной орбиты, а третья — в одной из неподвижных звезд. При этом он понимал, что измерительные приборы позволяют найти величины углов лишь с определенной точностью.

Какие из следующих высказываний истинны: 1) если в нашем пространстве имеет место геометрия Евклида, то сумма величин углов может отличаться от 180° лишь на величину, не выходящую за пределы погрешности инструментов; 2) если измерения показали, что сумма величин углов отличается от 180° на величину, не выходящую за пределы точности инструментов, то в нашем пространстве имеет место геометрия Евклида; 3) если измерения показали, что сумма величин углов отличается от 180° на величину, выходящую за пределы точности инструментов, то в нашем пространстве имеет место геометрия Лобачевского?

87. ЗАВЕРШЕНИЕ АКСИОМАТИЗАЦИИ ГЕОМЕТРИИ

Современная точка зрения на аксиоматическое построение геометрии (или какой-либо иной области математики) заключается в следующем:

во-первых, перечисляются первоначальные (неопределяемые) понятия;

во-вторых, указывается список аксиом. При формулировке аксиом используются первоначальные понятия. Смысл аксиом в том, что они устанавливают некоторые связи и взаимоотношения между первоначальными понятиями.

После этого дальнейшие геометрические факты (теоремы) выводятся дедуктивным путем (доказываются) с помощью *правил вывода* (в частности, правил использования знаков $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$).

Первоначальные понятия и аксиомы заимствованы из опыта. Поэтому понятно, что все последующие геометрические факты, хотя они получаются на основе системы аксиом чисто умозрительным, дедуктивным путем, имеют тесную связь с жизнью, достаточно хорошо описывают свойства реального пространства, применяются в практической деятельности человека.

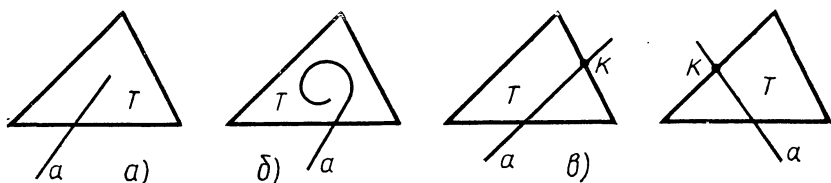


Рис. 390

После работ Лобачевского стало ясно, что аксиома параллельности не может быть исключена из списка евклидовых аксиом. Вместе с тем в XIX в. шла активная работа по пополнению этого списка аксиом.

Исследованию вопроса о взаимном расположении точек и прямых на плоскости посвятил ряд работ немецкий математик М. Паш (1843—1930). В частности, он заметил, что при аксиоматическом построении геометрии по схеме Евклида необходимо пользоваться следующей аксиомой:

если прямая, лежащая в плоскости треугольника и не проходящая ни через одну из его вершин, пересекает одну из сторон треугольника, то она обязательно пересечет одну из двух других его сторон.

Аксиома Паша означает, что если прямая a «входит» в треугольник T (рис. 390, а), то она не может остаться внутри этого треугольника (рис. 390, б), а должна выйти из этого треугольника, пересекая какую-либо из двух других его сторон (рис. 390, в). Евклид в подобных случаях ссылался на наглядность чертежа, а это при строго аксиоматическом построении геометрии недопустимо.

Работа по аксиоматизации евклидовой геометрии была завершена в самом конце XIX столетия известным немецким математиком Д. Гильбертом (1862—1943). В своей книге «Основания геометрии» (1899) Гильберт дает полный список аксиом евклидовой геометрии (21 аксиома), доказывает непротиворечивость этой аксиоматики (для этого он строит модель из «материала» арифметики).

У Гильберта все аксиомы разбиты на 5 групп. Первая группа аксиом (аксиомы соединения) содержит, в частности, аксиомы о том, что через каждые две точки проходит прямая и что такая прямая единственна; аксиому о том, что существуют три точки, не лежащие на одной прямой, и другие аксиомы.

Вторая группа аксиом (аксиомы порядка) говорит о взаимном расположении точек и прямых. Здесь содержится аксиома о том, что из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими. К этой же группе аксиом относится аксиома Паша и ряд других аксиом.

Третья, четвертая и пятая группы аксиом носят соответственно названия: «аксиомы конгруэнтности», «аксиома параллель-

ности» и «аксиомы непрерывности». Заметим, что в четвертой группе аксиом у Д. Гильберта только одна аксиома — аксиома параллельности (см. п. 83).

Работа по усовершенствованию аксиоматики геометрии продолжалась и в XX столетии. В 1911 г. Ф. Шур предложил другую аксиоматику, отличающуюся от гильбертовой тем, что вместо аксиом конгруэнтности (третья группа аксиом Гильберта) он ввел аксиомы движений. Аксиоматика Шура тесно связана с понятием группы движений и в этом смысле является более прогрессивной, чем гильбертовская.

Наиболее интересная с современной точки зрения аксиоматика была предложена выдающимся немецким математиком Г. Вейлем (1885—1955) в его книге «Пространство, время, материя», вышедшей в 1918 г. Вместо точек и прямых в качестве первоначальных неопределяемых понятий Вейль принимает *точки* и *векторы*, а среди его аксиом имеются, в частности, аксиомы, указывающие свойства суммы векторов и произведения вектора на число, свойства скалярного произведения. Таким образом, многие из свойств операций над векторами, которые в нашем курсе доказывались, в аксиоматике Вейля принимаются в качестве аксиом. Это позволяет значительно легче и короче (чем при использовании других аксиоматик) осуществить построение курса геометрии. Разумеется, было бы нецелесообразно заново излагать уже изученный нами курс геометрии на плоскости с помощью аксиоматики Вейля, однако в 9 классе при изучении пространственной геометрии мы с самого начала будем использовать эту систему аксиом.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Какие из следующих высказываний истинны: 1) аксиома Паша отсутствует в списке аксиом Вейля; следовательно, утверждение, выражаемое этой аксиомой, может быть выведено как теорема из аксиом Вейля; 2) свойства суммы векторов, которые у Вейля считаются аксиомами, выводятся из аксиом Гильберта как теоремы; 3) теорема косинусов не содержится в списке аксиом ни у Гильберта, ни у Вейля; следовательно, она может быть выведена как из аксиом Гильберта, так и из аксиом Вейля; 4) в геометрии Лобачевского имеются теоремы, которые невозможно вывести из аксиом Вейля; 5) в аксиоматике Вейля среди первоначальных неопределяемых понятий отсутствует понятие «прямая»; следовательно, при построении геометрии по Вейлю нужно дать определение прямой линии.
- б) как из аксиоматики Гильберта можно получить систему аксиом геометрии Лобачевского?

88. ПОНЯТИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

В этом пункте рассматривается аксиоматическая теория, которая играет важную роль в математике и ее приложениях. В этой теории имеются два первоначальных понятия: *точка* и *расстояние*; расстояние между точками A и B обозначается через $d(A, B)$. Аксиом в этой теории три.

Аксиома 1. Расстояние между двумя любыми точками есть неотрицательное число, причем $d(A, B) = 0$ в том и только в том случае, если $A = B$.

Аксиома 2. Для любых двух точек A и B справедливо равенство $d(A, B) = d(B, A)$.

Аксиома 3. Для любых трех точек A , B и C справедливо неравенство

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C).$$

Аксиому 2 иногда называют *аксиомой симметричности расстояния*, а аксиому 3 — *аксиомой треугольника*.

Каждую модель этой аксиоматики (построенную из любого материала) называют *метрическим пространством*.

Рассмотрим множество P всех точек плоскости; расстояние между точками будем понимать в обычном смысле: $d(A, B) = |AB|$ (единица длины предполагается заданной). Множество P является метрическим пространством, т. е. представляет собой модель, в которой выполняются аксиомы 1—3. В самом деле, как известно из курса 6 класса, расстояния на плоскости удовлетворяют перечисленным аксиомам.

Рассмотрим теперь другой пример метрического пространства. Будем теперь считать «точкой» произвольное действительное число, а за «расстояние» между a и b примем модуль разности этих чисел: $d(a, b) = |a - b|$.

Докажем, что множество R всех действительных чисел есть метрическое пространство. Для этого надо проверить, что рассматриваемые «точки» и «расстояния» удовлетворяют аксиомам 1—3.

Справедливость аксиом 1 и 2 легко проверяется. Например, справедливость аксиомы 2 проверяется так:

$$d(a, b) = |a - b| = |b - a| = d(b, a).$$

Справедливость аксиомы 3 следует из неравенства

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

доказываемого в курсе алгебры. Действительно, если в этом неравенстве положить $x = a - b$, $y = b - c$, то оно запишется в виде:

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|,$$

а это и означает, что $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.

Итак, мы рассмотрели две *модели* метрического пространства, причем в модели P точки имели привычный смысл, а в модели R за «точки» принимались числа.

В приложениях современной математики рассматриваются метрические пространства, «точками» которых являются линии, фигуры, траектории полета космических кораблей, плановые задания заводов и т. д.

Доказав (на основе аксиом 1—3) некоторую теорему теории метрических пространств, мы сможем утверждать, что эта теорема будет справедлива и в модели P , и в модели R , и, вообще, в любой другой модели метрического пространства. Ведь в каждой модели аксиомы 1—3 выполняются, а при доказательстве теорем в аксиоматической теории метрических пространств мы только этими аксиомами и пользуемся.

Положение вещей здесь в какой-то мере аналогично тому, которое мы имели при выводе геометрических фактов с помощью рассуждений. Например, измерив транспортиром величины углов *конкретного* треугольника, мы можем убедиться, что их сумма равна, насколько позволяет судить точность инструментов, 180° . Рассуждение (доказательство) позволяет, не проводя повторных измерений, утверждать, что этот вывод имеет *общий* характер, т. е. что в каждом треугольнике сумма величин углов равна 180° .

Подобно этому, развив аксиоматическую теорию, мы можем, не проводя повторных рассуждений, утверждать, что выводы этой аксиоматической теории имеют место в *каждой* модели метрического пространства. Это позволит, один раз доказав теоремы о метрическом пространстве, применять их в геометрии, алгебре, экономике, астронавтике, т. е. во всех тех областях, где появляются метрические пространства.

Разница, однако, будет в том, что отдельное доказательство (например, в геометрии) позволяет получить *теорему*, применимую хотя и к различным фигурам, но в рамках одной области — геометрии.

Аксиоматический же метод позволяет целые аксиоматически развитые *теории* применять в различных областях знаний. В этом состоит сила аксиоматического метода, широко используемого сейчас в различных областях как мощное орудие познания.

Из большого числа теорем, доказываемых в теории метрических пространств, рассмотрим для примера лишь одну простую теорему.

Теорема. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — произвольные точки метрического пространства (где $n \geq 3$). Тогда

$$d(a_1, a_n) \leq d(a_1, a_2) + d(a_2, a_3) + \dots + d(a_{n-1}, a_n).$$

Доказательство. При $n=3$ доказываемое неравенство имеет вид:

$$d(a_1, a_3) \leq d(a_1, a_2) + d(a_2, a_3).$$

Оно вытекает непосредственно из аксиомы треугольника.

При $n=4$ доказываемое неравенство имеет вид:

$$d(a_1, a_4) \leq d(a_1, a_2) + d(a_2, a_3) + d(a_3, a_4). \quad (1)$$

Для доказательства этого неравенства заметим, что по аксиоме треугольника

$$d(a_1, a_3) \leq d(a_1, a_2) + d(a_2, a_3),$$

$$d(a_1, a_4) \leq d(a_1, a_3) + d(a_3, a_4).$$

Складывая эти неравенства и производя упрощения, получаем неравенство (1).

При $n=5$ доказываемое неравенство имеет вид:

$$d(a_1, a_5) \leq d(a_1, a_2) + d(a_2, a_3) + d(a_3, a_4) + d(a_4, a_5). \quad (2)$$

Для доказательства заметим, что так как при $n=4$ теорема уже доказана, то

$$d(a_1, a_4) \leq d(a_1, a_2) + d(a_2, a_3) + d(a_3, a_4).$$

Кроме того, по аксиоме треугольника

$$d(a_1, a_5) \leq d(a_1, a_4) + d(a_4, a_5).$$

Складывая два последних неравенства, получаем (2).

Таким же способом проводятся доказательства для $n=6$; 7 и т. д. Теорема доказана.

Рассмотрим, какой смысл имеет эта теорема в метрическом пространстве P (т. е. на плоскости) и в метрическом пространстве R (множестве всех действительных чисел).

На плоскости P расстояние $d(A, B)$ между точками A и B равно длине $|AB|$ соединяющего их отрезка. Поэтому сумма

$$d(A_1, A_2) + d(A_2, A_3) + \dots + d(A_{n-1}, A_n)$$

представляет собой сумму длин отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$, т. е. длину ломаной $A_1A_2\dots A_n$. Далее $d(A_1, A_n) = |A_1A_n|$ есть длина отрезка, соединяющего концы этой ломаной. Таким образом, в применении к плоскости P доказанная теорема означает, что *длина отрезка, соединяющего концы ломаной, не превосходит длины этой ломаной*.

В метрическом пространстве R доказанная теорема имеет следующий смысл: для любых действительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ справедливо неравенство

$$|a_1 - a_n| \leq |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{n-1} - a_n|.$$

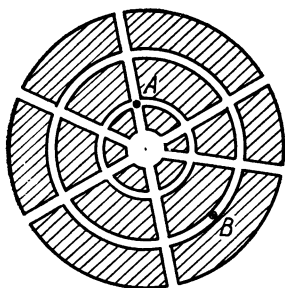


Рис. 391

- а) Будем считать улицы городов линиями (рис. 391) и будем рассматривать только те *точки*, которые расположены на этих линиях. *Расстоянием* между точками A и B будем считать длину кратчайшего пути, по которому можно пройти из A в B (по улицам). Докажите, что таким образом получается метрическое пространство.

Остается ли верным это утверждение, если расстояние определяется как длина кратчайшего автомобильного пути, причем на некоторых улицах введено одностороннее движение?

- б) В метрическом пространстве шаром радиуса r с центром A называется множество $\{M: d(A, M) \leq r\}$. Докажите, что если $d(A, B) > 2r$, то шары радиуса r с центрами A и B не пересекаются.
- в) Сформулируйте (и докажите) для произвольного метрического пространства утверждения, аналогичные тем, которые содержатся в задачах 647, 648.

89. ЭРЛАНГЕНСКАЯ ПРОГРАММА Ф. КЛЕЙНА

Как мы знаем, конгруэнтность фигур является отношением эквивалентности. Доказательство этого факта (см. п. 57) опиралось на то, что множество D всех движений плоскости представляет собой группу отображений. Но кроме D , мы знаем и другие группы отображений плоскости: группу T параллельных переносов, группу S подобий и др. Условимся говорить, что две фигуры A и B эквивалентны относительно группы отображений G (или, короче, G -эквивалентны), если существует такое отображение $f \in G$, что $f(A) = B$. Таким образом, конгруэнтные фигуры можно назвать D -эквивалентными (эквивалентными в смысле группы D), подобные фигуры S -эквивалентными и т. п. Из того, что G — группа отображений, вытекает, что отношение G -эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно. В случае группы D это доказано в п. 57, в общем случае доказательство аналогично.

Из того, что две фигуры D -эквивалентны (конгруэнтны), вытекает, что эти фигуры обладают одинаковыми свойствами: если одна из двух конгруэнтных фигур — многоугольник, то и другая — многоугольник, если периметр треугольника равен 20 см, то и конгруэнтный ему треугольник имеет периметр 20 см и т. п. Условимся говорить, что изучением всех тех свойств фигур,

которые сохраняются при движениях, т. е. которые одинаковы у конгруэнтных между собой фигур, занимается D -геометрия. Точно так же, если две фигуры S -эквивалентны (подобны), то они обладают рядом общих свойств. Например, если треугольник прямоугольный, то и подобный ему треугольник является прямоугольным, если фигура является окружностью, то и подобная ей фигура — окружность (хотя может быть и другого радиуса). О длине отрезков в S -геометрии говорить бессмысленно: ведь любые два отрезка подобны. Но об углах, о параллельности, о «форме» фигуры в S -геометрии говорить можно.

Можно ли говорить в S -геометрии, например, о равнобедренном треугольнике? На первый взгляд кажется, что нельзя (ведь любые два отрезка S -эквивалентны, так что в любом треугольнике стороны S -эквивалентны). Однако такой вывод поспешен. Дело в том, что хотя понятие длины отрезка не имеет смысла в S -геометрии, но *отношение* длин отрезков сохраняется при любом подобии и, следовательно, является одним из свойств, изучаемых в S -геометрии. Равнобедренный треугольник можно определить как такой треугольник, у которого отношение длин двух сторон равно 1. Поэтому в геометрии группы подобий можно говорить о равнобедренных треугольниках. Например, в этой геометрии справедлива теорема: для того чтобы отношение длин боковых сторон треугольника было равно 1, необходимо и достаточно чтобы углы при основании были S -эквивалентны.

Вообще, каждая группа отображений определяет некоторую «свою» геометрию.

Рассмотрим в качестве примера T -геометрию, где T — множество всех параллельных переносов. Мы знаем, что два направленных отрезка в том и только в том случае T -эквивалентны (т. е. получаются друг из друга параллельным переносом), если они являются представителями одного вектора. Отсюда ясно, что все свойства векторов и операций над векторами относятся к T -геометрии.

Теперь становится понятным, почему в п. 62, когда речь шла о решении задач с помощью векторов, предлагалось сначала перевести геометрическую задачу на векторный язык, затем провести вычисления с векторами и, наконец, полученный результат снова перевести на первоначальный язык. Ведь речь шла о двух *разных* геометриях: основная часть изучавшегося ранее материала относилась к D -геометрии, а векторы — к T -геометрии. Этим и объясняется необходимость перевода с языка одной геометрии на язык другой.

Рассмотрим группу самосовмещений G некоторой фигуры. Так как G есть группа отображений, то она задает некоторую своеобразную «геометрию» этой фигуры. Такая *групповая* точка зрения на свойства фигур и тел используется в кристаллогра-

фии, теории относительности, физике атома и элементарных частиц.

Мысль о том, что каждая группа отображений определяет свою геометрию, была впервые высказана выдающимся немецким геометром Феликсом Клейном в лекции, которую он прочел в 1872 г. при вступлении на должность профессора Эрлангенского университета. В этой лекции Клейн призывал переосмыслить все отдельные «геометрии» на основе групповой точки зрения. С тех пор эту точку зрения математики называют *эрлангенской программой*.

Как вы знаете, некоторое множество G взаимно-однозначных отображений (плоскости или какого-нибудь иного множества M на себя) называется группой отображений, если выполняются следующие три условия:

- а) $e \in G$;
- б) $(\forall f \in G) (f^{-1} \in G)$;
- в) $(\forall f, g \in G) (g \circ f \in G)$.

По существу мы имеем здесь дело с аксиоматической теорией — *теорией групп отображений*, в которой указанные выше условия (а, б, в) служат аксиомами. Примеры (модели) групп отображений были рассмотрены выше для случая, когда множество M представляет собой плоскость: группа движений D , группа параллельных переносов T , группа подобий S и др. Одной из важных теорем в этой аксиоматической теории является теорема о том, что понятие G -эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ОБСУЖДЕНИЯ

- а) Докажите, что если G — произвольная группа отображений плоскости, то понятие G -эквивалентности фигур рефлексивно, симметрично и транзитивно.
- б) Рассмотрим следующий предикат: фигура F имеет площадь 5 см^2 . Относится ли свойство, выражаемое этим предикатом, к D -геометрии? К T -геометрии? К S -геометрии?
- в) Рассмотрим следующую теорему: если стороны AD и BC четырехугольника $ABCD$ являются G -эквивалентными, то $ABCD$ — параллелограмм.
Справедлива ли эта теорема в T -геометрии (т. е. если вместо G подставить T)? Справедлива ли она в D -геометрии? В S -геометрии?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

К пункту 1

631. На координатной плоскости начертите окружности a, b, c радиуса 2 с центрами в точках $A(-1; -2)$, $B(1; 0)$, $C(3; 2)$.

Запишите фигуры a , b , c , $a \cap b$, $b \cap c$ с помощью фигурных скобок. Что представляет собой фигура $a \cap c$?

632. Что представляет собой пересечение множеств $l = \{M: |OM| = 2\}$ и $m = \{M: |OM| = 3\}$? Сначала ответьте на вопрос, а потом сделайте чертеж.

633. Точка B принадлежит фигуре $p = \{M: |AM| = 5\}$. Принадлежит ли точка A фигуре $q = \{M: |BM| = 5\}$? Сначала ответьте на вопрос, а потом сделайте чертеж.

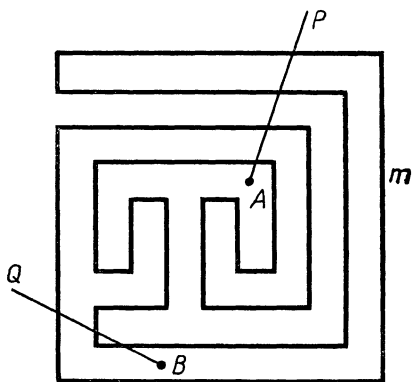


Рис. 392

К пункту 2

634. Начертите луч l и отметьте произвольную точку M вне этого луча. Постройте на луче l точку P , удаленную от точки M на расстояние 3. Рассмотрите различные случаи взаимного расположения луча l и точки M .
635. Фигура p представляет собой границу треугольника ABC , т. е. $p = [AB] \cup [BC] \cup [AC]$. Может ли случиться, что множество всех точек фигуры p , удаленных от A на расстояние 2, содержит 6 точек? 4 точки? 2 точки? Не содержит ни одной точки? В тех случаях, когда ответ положителен, сделайте чертеж.

К пункту 3

636. Точка B принадлежит фигуре $F = \{M: |AM| \geq 3\}$. Может ли точка A принадлежать фигуре $\{M: |BM| \leq 5\}$? Фигуре $\{M: |BM| \leq 3\}$? Фигуре $\{M: |BM| \leq 2\}$? Сделайте чертежи.
637. Рассматриваются фигуры $F_1 = \{M: |AM| > r_1\}$ и $F_2 = \{M: |AM| > r_2\}$. При каком условии справедливо соотношение: а) $F_1 \subset F_2$; б) $F_1 = F_2$; в) $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$?

К пункту 4

638. Почему не может существовать прямой, не проходящей через вершины треугольника и пересекающей все три его стороны? Только одну сторону?
639. Замкнутая ломаная m не пересекает себя (рис. 392). Лучи AP и BQ не проходят через вершины ломаной m , причем первый из них пересекает линию m в четырех точках, а второй — в трех. Могут ли точки A и B находиться в одной и той же области, определяемой линией m ? Ответьте на

тот же вопрос в случае, когда один луч пересекает ломаную m в четном числе точек, а другой — нечетном.

К пункту 5

640. Постройте точки M , B и C , если известно, что:

а) $|BM| - |MC| = |BC|$;

б) $|MC| - |BM| = |BC|$;

в) $|MC| + |BM| = |CB|$.

641. Могут ли для трех точек M , N и P одновременно выполняться соотношения

$$|MN| + |NP| = |MP|; \quad |MP| + |PN| = |MN|?$$

642. Для точек A , B , C , D справедливы соотношения $|AB|=4$, $|BC|=3$, $|AC|=7$, $|BD|=1$, $|CD|=2$. Найдите $|AD|$. Сделайте чертеж.

643. Расстояния от дерева M до деревьев A и B соответственно равны 50 м и 70 м. а) Может ли прямолинейная дорожка, идущая от дерева A к дереву B , иметь длину 200 м? б) Может ли хватить веревки длиной 15 м, чтобы натянуть ее между деревьями A и B ?

644. Дан круг K радиуса 3 и две точки A и B . Известно, что существуют точки $M \in K$ и $N \in K$, для которых $|AM|=4$, $|BN|=5$. Что можно сказать о расстоянии между точками A и B ?

645. Точки A и B , не принадлежащие прямой l , симметричны относительно этой прямой. а) Докажите, что если точка $M \notin l$ расположена по ту же сторону от l , что и точка A , то $|MA| < |MB|$. б) Докажите, что фигура $P = \{M: |AM| \leq |BM|\}$ есть полуплоскость, имеющая своей границей прямую l и содержащая точку A .

646. Пусть r_1 и r_2 — радиусы двух окружностей, d — расстояние между их центрами. Докажите, что: а) если $d > r_1 + r_2$, то окружности общих точек не имеют; б) если $d = r_1 + r_2$, то окружности имеют только одну общую точку.

647. Докажите, что, какова бы ни была точка O , сумма $|AO| + |BO| + |CO|$ больше половины периметра треугольника ABC . Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для произвольного многоугольника.

648. Докажите, что сумма длин диагоналей четырехугольника меньше его периметра.

К пункту 6

649. Точки A и B переходят при некотором движении f соответственно в точки A_1 , B_1 , причем $|AA_1|=6$, $|BB_1|=14$. Что можно сказать о расстоянии между точками A и B ? Ответьте на вопрос в случае, если $|AA_1|=a$, $|BB_1|=b$.

650. Три различные точки A , B , C переходят при движении g

соответственно в точки B , C , A . Докажите, что точки A , B и C не лежат на одной прямой, и вычислите углы треугольника ABC .

651. Движение f обладает тем свойством, что $l \cap f(l) \neq \emptyset$, где $l = \{M : |AM| = 5\}$. Что можно сказать о расстоянии между точками A и $f(A)$?

К пункту 7

652. Начертите треугольник ABC и постройте такие точки D , E и F , что $|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$, $|BC| = |EF|$, причем прямые AB и DE не параллельны. Возьмите точку P на одной из сторон треугольника ABC и точку O внутри этого треугольника. Постройте точки, в которые переходят P и O при движении, переводящем точки A , B , C в точки D , E , F .
653. Окружность l переходит при движении f в себя, треугольник T пересекается с окружностью l . Имеет ли окружность l общие точки с треугольником $f(T)$?

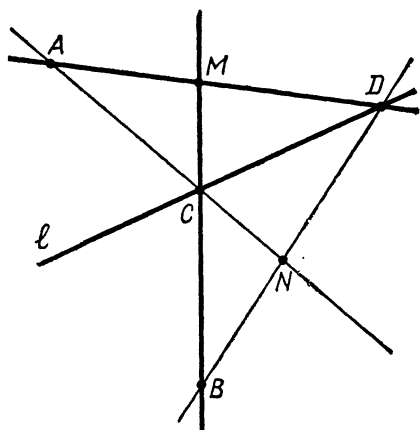


Рис. 393

К пункту 8

654. Даны прямая l и точки A и B (рис. 393), симметричные относительно прямой l . Через точку M , не лежащую на прямой l , проведены прямые AM и BM ; они пересекаются с прямой l в точках D и C . Наконец, проведены прямые AC и BD . Докажите, что точка N пересечения этих прямых симметрична точке M относительно прямой l .
655. Из концов основания $[AC]$ равнобедренного треугольника ABC проведены лучи m и n , образующие с основанием конгруэнтные углы. Лучи m и n пересекают боковые стороны в точках M и N . Докажите, что отрезки AM и CN конгруэнтны.
656. Через середины боковых сторон тупоугольного равнобедренного треугольника проведены перпендикуляры. Докажите, что отрезки перпендикуляров, заключенные внутри треугольника, конгруэнтны.

К пункту 9

657. Отрезок AC — основание равнобедренного треугольника ABC . На прямой AC вне треугольника отложены конгруэнтные отрезки AE и CH . Докажите, что $\angle ABE \cong \angle CBH$.

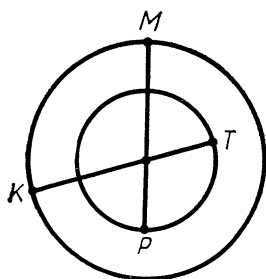


Рис. 394

658. На боковых сторонах $[BA]$ и $[BC]$ равнобедренного треугольника и на его основании отложены конгруэнтные отрезки BM , BH , AE и CD . Докажите, что $[ME] \cong [HD]$.

659. В равнобедренном треугольнике ABC на конгруэнтных сторонах $[AB]$ и $[CB]$ отложены конгруэнтные отрезки AP и CH . Докажите, что отрезки AH и CP пересекаются на перпендикуляре, проведенном из точки B к прямой AC .

660. Начертите окружность. Проведите диаметр $[AB]$ и произвольную прямую, перпендикулярную диаметру и пересекающую окружность в точках C и D . Докажите, что $\triangle ACB \cong \triangle ADB$.

661. По одну сторону прямой AB даны две точки M и N . Найдите на прямой AB такую точку C , чтобы прямая AB составляла конгруэнтные углы со сторонами ломаной MCN .

662. По одну сторону прямой l даны две точки M и N . Найдите на прямой l такую точку C , чтобы сумма $|CM| + |CN|$ была наименьшей.

663. Внутри острого угла дана точка P . Найдите на сторонах угла такие точки M и H , чтобы треугольник MPH имел наименьший периметр.

К пункту 10

664. В окружности из точки A диаметра $[AB]$ проведены две конгруэнтные хорды $[AM]$ и $[AP]$. Докажите, что $[MB] \cong [PB]$.

665. Докажите теорему: общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна прямой, проходящей через центры окружностей, и делится этой прямой пополам.

666. Точки A и B окружности l равноудалены от точки M . Докажите, что прямые MA и MB высекают в окружности l конгруэнтные хорды.

667. Через общий центр двух концентрических окружностей (рис. 394) проведены отрезки MP и TK , концы каждого из которых лежат на различных окружностях. Докажите, что $[MT] \cong [PK]$.

К пункту 11

668. Из точки A проведены к прямой l перпендикуляр AO и наклонная AB ; $|AO| = 2$, $|AB| = 5$. Какие из следующих высказываний истинны:

- а) $|BO| < 3$; б) $|BO| \geq 5$; в) $|BO| < 5$;
г) $|BO| \geq 3$; д) $|BO| > 3$?

669. Перпендикуляр из точки O к прямой l имеет длину 3. Что представляют собой следующие множества точек:

- а) $P = \{M: M \in l \text{ и } |OM| = 3\}$;
- б) $Q = \{M: M \in l \text{ и } |OM| = 4\}$;
- в) $F = \{M: M \in l \text{ и } |OM| \leq 5\}$;
- г) $G = \{M: M \in l \text{ и } |OM| \geq 5\}$;
- д) $H = \{M: M \in l \text{ и } |OM| = 2\}$?

670. Длины сторон треугольника ABC удовлетворяют условию $|AC| \geq |BC|$. Докажите, что для любой внутренней точки D отрезка AB справедливо неравенство $|CD| < |AC|$.

671. В треугольнике ABC сторона AB наибольшая. Докажите, что для любых точек $M, N \in \triangle ABC$ справедливо неравенство $|MN| \leq |AB|$.

672. Докажите, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

673. Докажите, что если M — произвольная точка треугольника ABC , то сумма $|MA| + |MB| + |MC|$ меньше периметра этого треугольника.

К пункту 12

674. Расстояние от точки A до фигуры F равно 5, а расстояние от той же точки A до фигуры H равно 3. Можно ли утверждать, что найдутся точки $M \in F$, $N \in H$, для которых $|MN| \leq 8$?

675. Расстояние от точки A до фигуры F равно 2. Взята такая точка B , что $|AB| = 7$. Что можно сказать об истинности следующих высказываний: а) $d(B, F) = 9$; б) $d(B, F) \leq 9$; в) $d(B, F) > 9$?

676. Ни одна из фигур F, G не содержится целиком в другой. Какие из следующих высказываний истинны:

а) для любой точки M справедливо соотношение

$$d(M, F) \leq d(M, G);$$

б) для любой точки M справедливо соотношение

$$d(M, F) \geq d(M, F \cup G);$$

в) для любой точки M справедливо соотношение

$$d(M, F) \leq d(M, F \cap G)?$$

677. Определите расстояние от точки A до фигуры $l = \{M: |OM| = 2\}$ в следующих случаях: а) $A = O$; б) $|OA| = 1$; в) $|OA| = 3$. Сформулируйте общее утверждение о расстоянии от точки до окружности.

678. Дана окружность F радиуса r с центром O . Найдите множество $H = \{M: d(M, F) = h\}$. Рассмотрите отдельно случаи: а) $h > r$; б) $h < r$; в) $h = r$.

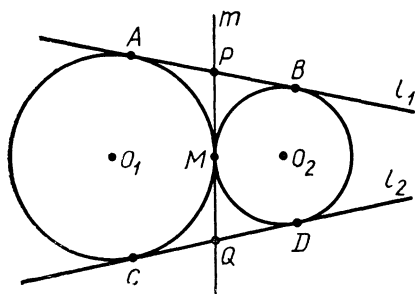


Рис. 395

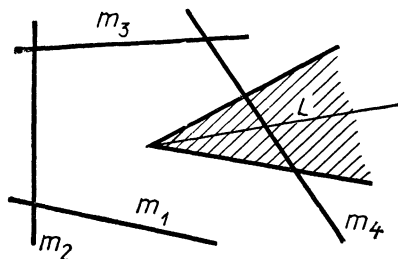


Рис. 396

679. Даны две неконцентрические окружности l и m . Из скольких точек состоит множество $\{M: d(M, l) = 2 \text{ и } d(M, m) = 3\}$?

К пункту 13

680. Окружности с центрами O_1 и O_2 имеют общую точку $M \in [O_1O_2]$, прямые l_1 и l_2 — общие касательные окружностей, прямая m перпендикулярна (O_1O_2) . Докажите при обозначениях, указанных на рисунке 395, что $|AB| = |CD| = |PQ|$.

681. Окружности m_1 и m_2 с центрами O_1 и O_2 имеют две общие точки M, N ; прямые l_1 и l_2 , проходящие через точку M , касаются соответственно окружностей m_1 и m_2 . Определите

величины четырех углов, образовавшихся при пересечении прямых l_1 и l_2 , если $\widehat{O_1MO_2} = 107^\circ$.

К пункту 14

682. Возьмите угол L , меньший развернутого, и прямую m . Найдите множество всех точек прямой m , одинаково удаленных от сторон угла L . Рассмотрите решение этой задачи для угла L и каждой из прямых m_1, m_2, m_3, m_4 , заданных на рисунке 396.
683. Дан угол, меньший развернутого. Найдите множество точек, одинаково удаленных от обеих его сторон и от его вершины.

К пункту 15

684. Даны три прямые l, m, n , причем $l \cap m \cap n = \emptyset$. Постройте окружность, касающуюся всех трех прямых. Сколько таких окружностей может существовать?
685. Постройте окружность данного радиуса r , касающуюся данной окружности l и проходящую через данную точку P .

К пункту 16

686. Докажите истинность следующих высказываний:
 а) $(\forall F, \text{ т. } A, B, \text{ где } F \text{ — фигура}) (d(A, F) \leq d(B, F) + |AB|)$;
 б) $(\forall \text{ т. } A, O, r > 0, F, \text{ где } F \text{ — окружность радиуса } r \text{ с центром } O) (d(A, F) = ||AO| - r|)$;

в) $(\forall \triangle ABC, \text{ т. } M, \text{ где } M \in \triangle ABC)$
 $(|MA| + |MB| \leq |CA| + |CB|)$.

К пункту 17

687. Используя знаки, запишите утверждения, содержащиеся в задачах 671—672.

688. Докажите следующую теорему:
 $(\forall l, \text{ т. } A, B, M, N, O, \text{ где } l \text{ — окружность с центром } O; A, B \in l; M, N \in [AB]) (|AM| = |BN|) \Rightarrow (|OM| = |ON|)$.

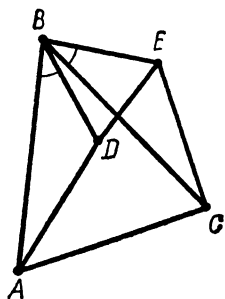


Рис. 397

К пункту 18

689. На рисунке 397 $|AB| = |BC|$, $|BD| = |BE|$, $\widehat{ABD} = \widehat{CBE}$. Найдите на этом рисунке конгруэнтные треугольники и докажите их конгруэнтность.

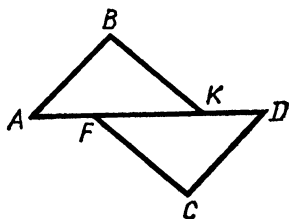


Рис. 398

690. Докажите, что если хорды одной и той же окружности находятся на одинаковом расстоянии от центра, то они конгруэнтны.
691. Впишите в окружность два треугольника, стороны которых соответственно перпендикулярны друг другу.
692. Докажите, что один из отрезков, получающихся при пересечении диагоналей правильного пятиугольника, конгруэнтен стороне пятиугольника.
693. Докажите, что середины сторон правильного n -угольника являются вершинами правильного n -угольника.
694. Докажите, что существует окружность, касающаяся всех сторон правильного n -угольника.
695. Вершины правильного $2n$ -угольника соединены через одну. Докажите, что проведенные отрезки являются сторонами правильного n -угольника.
696. Впишите в квадрат равносторонний треугольник так, чтобы одной из вершин треугольника служила данная точка на стороне квадрата.

К пункту 19

697. На рисунке 398 $(AB) \parallel (CD)$, $(BK) \parallel (CF)$.

Найдите условия, при которых $\triangle ABK \cong \triangle FCD$.

698. Отрезок CD симметричен отрезку AB относительно точки O . Докажите, что перпендикуляры, проведенные через середины отрезков AB и CD , симметричны относительно точки O .

699. Справедлива ли следующая теорема:

$(\forall A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)) (A \text{ и } B \text{ симметричны относительно начала координат}) \Rightarrow (x_1 = -x_2 \text{ и } y_1 = -y_2)$?

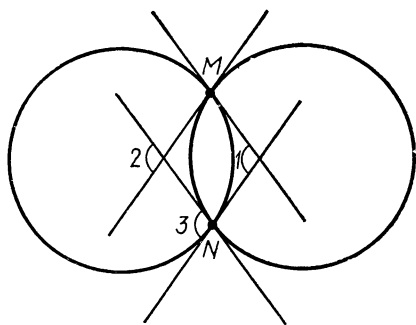


Рис. 399

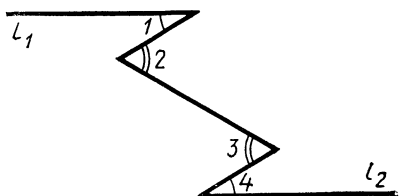


Рис. 400

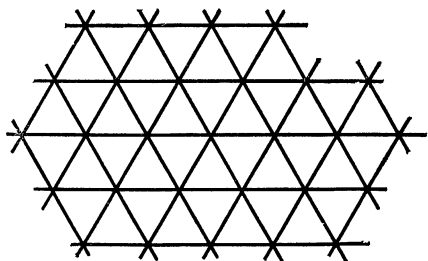


Рис. 401

700. Дан произвольный четырехугольник P . Докажите, что четырехугольниками, конгруэнтными P , можно застелить паркет, т. е. покрыть всю плоскость без пропусков и перекрытий.

К пункту 20

701. Лучи OA и O_1A_1 параллельны и одинаково направлены, лучи OB и O_1B_1 также параллельны и одинаково направлены. Докажите, что углы AOB и $A_1O_1B_1$ (меньшие развернутого) конгруэнтны.

702. Две конгруэнтные окружности пересекаются в точках M и N . В этих точках проведены касательные к окружностям (рис. 399). Докажите, что $\hat{1} = \hat{2} = \hat{3}$.

703. Через центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$, проведена прямая, параллельная (AB) . Эта прямая пересекает стороны AC и BC в точках M и N . Докажите, что $|MN| = |AM| + |BN|$.

К пункту 21

704. Для теорем, содержащихся в задачах 664, 666, 672,

690, выделите разъяснительную часть, условие и заключение. Составьте обратные теоремы и решите вопрос о справедливости обратных теорем.

705. Для теоремы, содержащейся в задаче 699, запишите и докажите обратную теорему.

К пункту 22

706. Докажите, что в правильном пятиугольнике каждая диагональ параллельна одной из сторон.

707. На рисунке 400 $\hat{1} = \hat{4}$, $\hat{2} = \hat{3}$. Докажите, что $l_1 \parallel l_2$.

К пункту 23

708. Может ли пересечение выпуклых фигур быть невыпуклой фигурой?

709. На рисунке 401 изображен паркет (т. е. покрытие плоскости без пропусков и перекрытий), составленный из правильных треугольников. Из каких еще правильных многоугольников можно составить паркет?

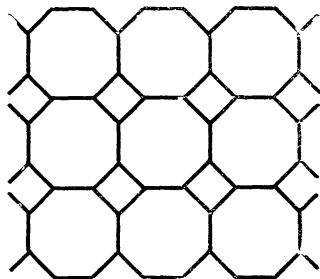


Рис. 402

710. На рисунке 402 изображен паркет, составленный из правильных многоугольников двух типов (четырёхугольников и восьмиугольников). Найдите еще два паркета такого типа.

К пункту 24

711. Может ли фигура иметь только два центра симметрии? Конечное число центров симметрии?

712. Фигура F называется ограниченной, если существует круг, содержащий эту фигуру. Докажите, что если фигура имеет более одного центра симметрии, то она не может быть ограниченной.

713. Какие из следующих высказываний истинны:

- а) любой правильный многоугольник имеет центр симметрии;
- б) любой правильный многоугольник с четным числом сторон имеет центр симметрии;
- в) любой правильный многоугольник с нечетным числом сторон имеет центр симметрии?

714. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и D пересекают диагональ $[AC]$ в двух различных точках M и K . Докажите, что $BKDM$ — параллелограмм.

715. На сторонах параллелограмма $ABCD$ построены вне его равносторонние треугольники ABM , BCN , CDP , DAQ . Докажите, что $MNPQ$ — параллелограмм.

К пункту 25

716. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах $[AB]$ и $[CD]$ отложены конгруэнтные отрезки AE и CM . Докажите, что отрезок EM делится диагональю $[AC]$ пополам.

717. Длины сторон треугольника равны a , b и c ; расстояние от середины стороны a до противоположной вершины равно m . Докажите, что справедливы следующие неравенства:

$$\text{а) } m < \frac{b+c}{2}; \quad \text{б) } m > \frac{b+c-a}{2}.$$

718. Точки M , N , P — середины сторон $[BC]$, $[CA]$ и $[AB]$ треугольника ABC . Докажите, что сумма $|AM| + |BN| + |CP|$

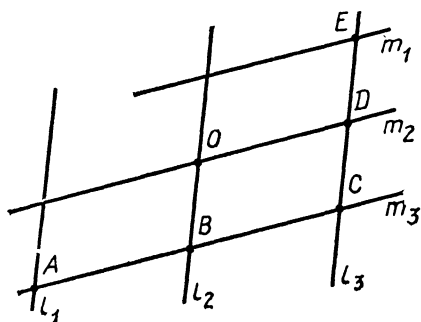


Рис. 403

меньше периметра треугольника ABC и больше половины периметра.

719. На рисунке 403 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, $m_1 \parallel m_2 \parallel m_3$, $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$. Докажите, что точки A , O , E лежат на одной прямой.

К пункту 26

720. $ABCD$ — параллелограмм. На лучах AB , AD , CD , CB взяты такие точки M , N , P , Q , что $|AM| = |CP|$,

$|AN| = |CQ|$. Докажите, что середины отрезков MN , NP , PQ , QM являются вершинами параллелограмма.

721. Докажите, что если противоположные стороны четырехугольника попарно конгруэнтны, то этот четырехугольник — параллелограмм.
722. Постройте множество $\{M: d(M, F) = h\}$, если F есть: а) угол, меньший развернутого; б) треугольник.
723. Через произвольную точку M на основании равнобедренного треугольника проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Докажите, что получившийся при этом четырехугольник — параллелограмм, периметр которого не зависит от положения точки M .

К пункту 27

724. Вставьте вместо многоточия слова «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно», чтобы получились верные высказывания:
- для того чтобы точки A и B были симметричны относительно прямой l , ..., чтобы для любой точки $M \in l$ было справедливо равенство $|AM| = |BM|$;
 - для справедливости неравенства $|AM| < |AN|$, ..., чтобы отрезок AM был перпендикуляром, а $[AN]$ — наклонной к некоторой прямой;
 - для того чтобы две окружности не имели общих точек, ..., чтобы расстояние между их центрами было больше суммы радиусов;
 - для того чтобы многоугольник был правильным, ..., чтобы существовала окружность, проходящая через все вершины этого многоугольника;
 - для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, ..., чтобы две противоположные его стороны были параллельны, а две другие противоположные стороны конгруэнтны;
 - для того чтобы шестиугольник был правильным, ..., чтобы величина каждого его угла была равна 120° ;

ж) для того чтобы две прямые были параллельны, ..., чтобы существовала точка, относительно которой эти прямые симметричны.

К пункту 28

725. Какие из следующих высказываний истинны:
а) существует четырехугольник, имеющий ось симметрии, который является ромбом;
б) любой четырехугольник, имеющий ось симметрии, есть ромб;
в) существует параллелограмм, имеющий ось симметрии, который является ромбом;
г) любой параллелограмм, имеющий ось симметрии, есть ромб?
726. Докажите, что если для параллелограмма F существует вписанная окружность, то F — ромб.
727. Две окружности с центрами P и Q пересекаются в точках A и B . При каком условии четырехугольник $APBQ$ будет ромбом?

К пункту 29

728. Справедливо ли утверждение, что любой четырехугольник, у которого диагонали конгруэнтны и один из углов прямой, есть прямоугольник?
729. Докажите, что всякий параллелограмм, у которого диагонали конгруэнтны, есть прямоугольник.
730. В прямоугольнике проведены биссектрисы всех четырех его углов. Докажите, что при пересечении четырех проведенных прямых образовался квадрат.
731. Через точку, взятую внутри квадрата, проведены две перпендикулярные прямые, причем каждая из них пересекает противоположные стороны квадрата. Докажите, что отрезки этих прямых, заключенные внутри квадрата, конгруэнтны.
732. Докажите, что если две точки M , N находятся на одинаковом расстоянии от прямой l и лежат по одну сторону от нее, то прямая MN параллельна l .

К пункту 30

733. Рассмотрите следующие предикаты, заданные на множестве M всех четырехугольников, вершины которых последовательно обозначены буквами A , B , C , D . Для каждого предиката укажите подмножество множества M , на котором этот предикат превращается в истинное высказывание:

- а) $|AC| + |BD| < |AB| + |BC| + |CD| + |DA|$;
б) $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ и $|AD| = |BC|$;
в) $d(A, (CD)) = d(B, (CD)) = d(A, (BC)) = d(D, (BC))$;
г) $|AB| = |CD|$, $|AC| = |BD|$ и $\hat{A} = 90^\circ$;

- д) $|AB| = |BC| = |CD|$ и $\hat{B} = \hat{C} = 90^\circ$;
 е) $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = |AC|$;
 ж) $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = |AC| = |BD|$.

734. Выделите разъяснительную часть, условие и заключение в теоремах, указанных в задачах 672, 713, 721. Укажите в каждом случае, на каком множестве задан предикат, выражающий условие теоремы, заключение теоремы.

К пункту 31

735. Какие из следующих высказываний о треугольниках и четырехугольниках являются истинными:

- а) $(\exists \triangle ABC) (\hat{A} - \hat{B} = \hat{B} - \hat{C} = 60^\circ)$;
 б) $(\exists \triangle ABC) (\hat{A} - \hat{B} = \hat{B} - \hat{C} = 45^\circ)$;
 в) $(\exists ABCD) (|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = |AC| = |BD|)$;
 г) $(\exists ABCD) (\hat{A} - \hat{B} = \hat{B} - \hat{C} = \hat{C} - \hat{D} = 60^\circ)$;
 д) $(\exists ABCD) (|AC| = |BD|, (AC) \perp (BD), |AB| = |BC| \text{ и } |AB| \neq |AD|)$;
 е) $(\exists ABCD) (|AC| = |BD|, (AC) \perp (BD), |AB| = |BC| \text{ и } |AD| \neq |DC|)$?

736. Запишите, используя знаки, следующие высказывания:

- а) в любом треугольнике существует точка, равноудаленная от всех трех сторон треугольника;
 б) для любого треугольника существует точка, равноудаленная от всех трех вершин треугольника;
 в) в любом ромбе существует точка, равноудаленная от всех четырех сторон ромба;
 г) для любых двух конгруэнтных фигур существует движение, переводящее одну из этих фигур в другую.

К пункту 32

737. Точки M и K — середины сторон $[BC]$ и $[AD]$ параллелограмма $ABCD$. Докажите, что диагональ $[BD]$ делится отрезками CK и MA на три конгруэнтные части.

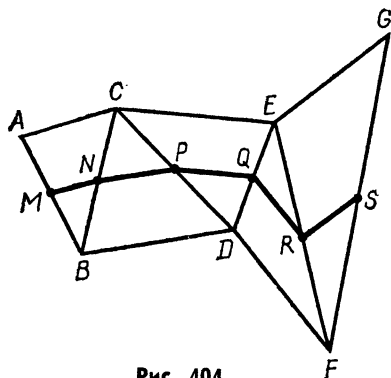


Рис. 404

738. $ABCD$ — параллелограмм; докажите, что середины отрезков AB , BD и DC лежат на одной прямой.

739. Точки M , N , P , Q , R , S — середины отрезков AB , BC , CD , DE , EF , FG (рис. 404).

Докажите, что длина ломаной $MNPQRS$ равна полусумме длин ломаных BDF и $ACEG$.

К пункту 33

740. Докажите, что середины боковых сторон трапеции и середины ее диагоналей лежат на одной прямой.
741. Докажите, что если средняя линия трапеции проходит через точку пересечения диагоналей, то эта трапеция является параллелограммом.
742. Точки A и B лежат по одну сторону прямой a ; точка M — середина отрезка AB . Докажите, что

$$d(M, a) = \frac{1}{2} (d(A, a) + d(B, a)).$$

Как изменится формулировка, если A и B лежат по разные стороны прямой a ?

743. Две concentрические окружности пересечены третьей окружностью. Докажите, что точки пересечения окружностей служат вершинами трапеции.
744. На стороне $[AB]$ параллелограмма $ABCD$ взята такая точка M , что $|AM| = \frac{1}{n} |AB|$. Точка пересечения отрезков AC и DM обозначена через O . Докажите, что $|AO| = \frac{1}{n+1} |AC|$.

К пункту 34

745. Длины отрезков AB , BC , CD , вычисленные с точностью до 0,1 с недостатком, равны соответственно 3,1; 6,7; 9,3, а длина отрезка AD , вычисленная с точностью до 0,01 с избытком, равна 19,40. Каковы длины отрезков AB , BC , CD с точностью до 0,01?
746. Длины отрезков AB и BC , вычисленные с точностью до 0,1 с избытком, равны соответственно 2,7 и 3,8. Могут ли точки A , B , C лежать на одной прямой, если длина отрезка AC , вычисленная с точностью до 0,1 с недостатком, равна: а) 6,2; б) 6,4?

К пункту 35

747. Длины отрезков AB и BC , вычисленные с точностью до 0,1 см с недостатком, равны соответственно 1,7 см и 1,6 см. Длина отрезка AC , вычисленная с точностью до 0,001 м с избытком, равна 0,029 м. Докажите, что расстояние от точки B до прямой AC не менее 2 мм.
748. Известно, что $|AB| = 173$ мм, $d(A, F) = 0,54$ м. Укажите в сантиметрах, в каких границах может заключаться расстояние от точки B до фигуры F .

К пункту 36

749. Существуют ли точки A , B , C , для которых

$$\frac{|AB|}{|AC|} = 0,53 \quad \text{и} \quad \frac{|AC|}{|BC|} = 2,25?$$

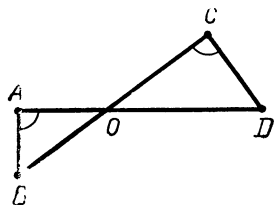


Рис. 405

750. Докажите, что если P — внутренняя точка отрезка MN , то

$$\frac{|MN|}{|MP|} + \frac{|MN|}{|NP|} \geq 4.$$

К пункту 37

751. Дан параллелограмм $ABCD$. Точки K и M построены так, что $|AB| + |BK| = |AK|$, $|KC| + |CM| = |KM|$, $|AD| + |DM| = |AM|$. Зная, что $|AB| = 5$ см, $|BC| = |CM| = |AK| = 12$ см, найдите периметр треугольника AKM .

752. На одной стороне угла с вершиной O взяты точки A и B , а на другой стороне — точки C , D и D_1 , причем $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OC|}{|OD|}$ и $(AC) \parallel (BD_1)$. Докажите, что точки D и D_1 совпадают.

К пункту 38

753. Начертите треугольник ABC . Найдите на прямых AB и AC такие точки M и N , что $(MN) \parallel (BC)$ и $|MN| = \frac{1}{3}|BC|$.

754. Общая касательная к двум окружностям пересекает прямую, проходящую через центры окружностей, в точке M . Определите расстояния от точки M до центров окружностей, если радиусы окружностей равны 3 см и 12 см, а расстояние между центрами окружностей равно 10 см.

755. Длины отрезков AB , OB , OD , изображенных на рисунке 405, соответственно равны 3,9; 5,2; 15,2. Определите $|CD|$, если $(AB) \perp (AD)$, $(CD) \perp (BC)$.

К пункту 39

756. Две окружности радиуса r касаются в точке M . В одной окружности проведена хорда $[MA]$, в другой — хорда $[MB]$, перпендикулярная $[MA]$. Определите $|AB|$.

757. Докажите, что параллелограмм в том и только в том случае может быть вписан в окружность, если он является прямоугольником.

758. В окружность вписан равносторонний треугольник ABC . Точка M лежит на дуге, меньшей полуокружности, с концами A и B . Докажите, что $|MC| = |MA| + |MB|$.

759. Что представляет собой множество середин всех хорд окружности l , проходящих через точку A ? Рассмотрите отдельно случай, когда точка A лежит на окружности l , принадлежит внутренней или внешней области этой окружности (в последнем случае не сами хорды, а их продолжения проходят через точку A).

К пункту 40

760. Рассмотрим следующие высказывания:

$$P: (\forall t. A, B, C) (|AC| = |BC|);$$

$$Q: (\exists t. A, B, C) (|AC| = |BC|);$$

$$R: (\forall t. A, B) (\exists t. C) (|AC| = |BC|);$$

$$S: (\exists t. A, B) (\forall t. C) (|AC| = |BC|).$$

Сформулируйте эти высказывания словами. Составьте, а затем сформулируйте словами высказывания $\neg P$, $\neg Q$, $\neg R$, $\neg S$. Какие из сформулированных высказываний истинны?

761. Составьте отрицания высказываний, содержащихся в задаче 736. Являются ли эти отрицания истинными высказываниями?

К пункту 41

762. Докажите, что если четырехугольник выпуклый, то сумма длин диагоналей больше полупериметра. Приведите контрпример, показывающий, что обратная теорема неверна.

763. Для каждого из следующих высказываний либо найдите доказательство, либо приведите контрпример:

$$(\forall ABCD) (|AB| = |CD| \text{ и } |AC| = |BD|) \Rightarrow (ABCD \text{ — прямоугольник});$$

$$\text{б) } (\forall ABCD) (\hat{A} = \hat{B} \text{ и } |AC| = |BD|) \Rightarrow (ABCD \text{ — прямоугольник});$$

$$\text{в) } (\forall \triangle ABC) (\hat{A} = 60^\circ \text{ и } |AB| = |BC|) \Rightarrow (\triangle ABC \text{ — равносторонний});$$

$$\text{г) } (\forall ABCD) (|AB| = |AC| = |AD|) \Rightarrow (\hat{A} = 2(\widehat{BDC} + \widehat{CBD}));$$

$$\text{д) } (\forall ABCD) (|AB| = |BC| = |CD| \text{ и } |AC| = |BD|) \Rightarrow (ABCD \text{ — квадрат}).$$

К пункту 42

764. Докажите, что для любых фигур M , N справедливо неравенство $S(M \cup N) \leq S(M) + S(N)$. Приведите контрпример, показывающий ложность высказывания:

$$(\forall M, N, \text{ где } M, N \text{ — фигуры}) (S(M \cup N) = S(M) + S(N)).$$

765. Дан параллелограмм F . Докажите, что для любой точки A существует проходящая через A прямая, которая разбивает параллелограмм F на две части равной площади. Сделайте обобщение для произвольной центрально-симметричной фигуры.

К пункту 43

766. Какие из следующих высказываний истинны:

а) если длины сторон прямоугольника F на 2 см больше длин соответствующих сторон прямоугольника H , то для площа-

дей этих прямоугольников (в квадратных сантиметрах) справедливо равенство $S(F) = S(H) + 4$;

б) при тех же условиях справедливо равенство $S(F) = S(H) + p + 4$, где p — периметр прямоугольника H (в сантиметрах);

в) если длины сторон прямоугольника F в 2 раза больше длин соответствующих сторон прямоугольника H , то для площадей этих прямоугольников (в квадратных сантиметрах) справедливо равенство $S(F) = 4S(H)$;

г) если единицу измерения длин уменьшить в 2 раза, то для площади $S(F)$ прямоугольника F в старых квадратных единицах и его площади $S'(F)$ в новых квадратных единицах справедливо равенство $S'(F) = \frac{1}{4} S(F)$;

д) при тех же условиях справедливо равенство $S'(F) = 4S(F)$?

К пункту 44

767. Отношение длин сторон параллелограмма умножили на отношение соответствующих высот. Чему равно произведение?

768. Какой из ромбов, описанных около данной окружности, имеет наименьшую площадь? Существует ли описанный ромб наибольшей площади?

769. Каков наименьший периметр параллелограмма, имеющего площадь 36 см²?

К пункту 45

770. а) Дан равносторонний треугольник и точка M внутри него. Докажите, что сумма расстояний от точки M до сторон треугольника не зависит от выбора точки M .

б) Обобщите это утверждение на случай произвольного правильного многоугольника. Возможно ли дальнейшее обобщение?

771. Докажите, что если точки A и C лежат по разные стороны прямой BD , то площадь четырехугольника $ABCD$ может быть вычислена по формуле $S = \frac{1}{2} m (h_1 + h_2)$, где m — длина диагонали $[BD]$, а h_1 и h_2 — расстояния от концов другой диагонали до прямой BD .

772. Докажите, что расстояния от любой точки диагонали параллелограмма до прямых, на которых расположены его непараллельные стороны, обратно пропорциональны длинам этих сторон.

773. Дан произвольный треугольник ABC . На лучах AB , BC , CA взяты такие точки M , N , P , что $|AM| = 2|AB|$, $|BN| = 2|BC|$, $|CP| = 2|CA|$. Во сколько раз площадь треугольника MNP больше площади треугольника ABC ?

К пункту 46

774. Площадь треугольника ABC равна S . Сторона $[AB]$ разделена точками M, N на три конгруэнтные части и через точки M, N проведены прямые, параллельные $[BC]$. Определите площади частей, на которые разбивается $\triangle ABC$ этими прямыми.
775. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно ее основаниям, разбивает трапецию на две части. Найдите отношение площадей этих частей, если основания исходной трапеции имеют длины a и b .

К пункту 47

776. Докажите, что выпуклый многоугольник, описанный около окружности радиуса r , имеет площадь $S = \frac{1}{2} pr$, где p — периметр многоугольника.
777. Дан произвольный выпуклый четырехугольник $ABCD$. На лучах AB, BC, CD, DA взяты такие точки M, N, P, Q , что $|AM| = 2|AB|$, $|BN| = 2|BC|$, $|CP| = 2|CD|$, $|DQ| = 2|DA|$. Во сколько раз площадь четырехугольника $MNPQ$ больше площади четырехугольника $ABCD$?
778. На стороне $[AB]$ выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки M, N , делящие ее на три конгруэнтные части, а на стороне $[CD]$ — точки P и Q , делящие $[CD]$ на три конгруэнтные части. Докажите, что площадь четырехугольника с вершинами M, N, P, Q в 3 раза меньше площади четырехугольника $ABCD$.
779. Дан прямоугольник $ABCD$ и равновеликий ему квадрат. Докажите, что если $|AB| < |BC| < 2|AB|$, то равносторонность квадрата и прямоугольника можно установить, разрезая каждый из них на три части. Существует ли прямоугольник, который невозможно превратить в равновеликий квадрат, разрезая его на десять частей?
780. Докажите, что если диагональ четырехугольника делит другую диагональ пополам, то она делит четырехугольник на две части равной площади. Верна ли обратная теорема?

К пункту 48

781. Докажите, что если $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$, то существует такой параллельный перенос f и такое движение g , являющееся осевой симметрией или поворотом, что движение $g \circ f$ переводит $\triangle ABC$ в $\triangle A_1B_1C_1$.
782. Движения f, g, h представляют собой повороты вокруг одной и той же точки O на углы $m^\circ, n^\circ, p^\circ$. Совпадают ли движения $f \circ (g \circ h)$, $(g \circ h) \circ f$ и $h \circ (g \circ f)$?
783. f и g — движения плоскости. Какие из следующих высказываний истинны:

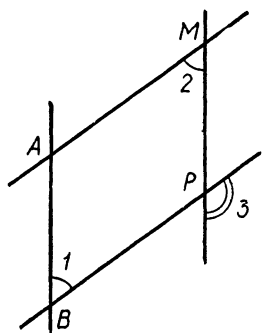


Рис. 406

- а) если каждое из движений f, g оставляет точку O неподвижной, то любая окружность с центром O переходит при движении $g \circ f$ в себя;
 б) если любая окружность с центром O переходит при движении $g \circ f$ в себя, то каждое из движений f, g оставляет точку O неподвижной;
 в) если любая окружность с центром O переходит при движении $g \circ f$ в себя и $P = f(O)$, то $g(P) = O$;
 г) если любая окружность с центром O переходит при движении $g \circ f$ в себя и $Q = g(O)$, то $f(Q) = O$?

К пункту 49

784. f, g, h и k — движения плоскости. Совпадают ли движения $(k \circ h) \circ (g \circ f)$ и $((k \circ h) \circ g) \circ f$?
785. Движение f — симметрия относительно точки $O(0; 0)$; движение g — симметрия относительно оси абсцисс; движение h — поворот на -90° вокруг точки O . Какие из следующих равенств справедливы:
 а) $f \circ (f \circ h) = h$; б) $(f \circ h) \circ f = h$; в) $g \circ (g \circ h) = h$;
 г) $(g \circ h) \circ g = h$; д) $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$; е) $f \circ g = g \circ f$?

К пункту 50

786. Две окружности радиуса r проведены так, что каждая из них проходит через центр другой. Параллельно прямой, проходящей через центры окружностей, проведена прямая, пересекающая эти окружности последовательно в точках A, B, C и D , причем $|AD| > 2r$. Определите $|AB|$ и $|CD|$.
787. Какие из следующих высказываний истинны:
 а) если f — центральная симметрия, то каждый вектор переходит в результате движения f в противоположный ему вектор;
 б) если каждый вектор переходит в результате движения f в противоположный ему вектор, то f — центральная симметрия;
 в) если f — параллельный перенос, то каждый вектор переходит в результате движения f в тот же вектор;
 г) если каждый вектор переходит в результате движения f в тот же вектор, то f — параллельный перенос?
788. Докажите, что если $\hat{1} = 40^\circ$, $\hat{2} = 40^\circ$ и $\hat{3} = 140^\circ$ (рис. 406), то $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{PM}$.

К пункту 51

789. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$ противоположны. Докажите, что $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LN} = \vec{0}$.

790. Докажите, что если существует вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$, который при повороте r переходит в противоположный вектор, то r есть центральная симметрия.
791. Докажите, что если существует вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$, который при повороте r переходит в себя, то r — тождественное отображение.
792. Движение r — поворот, не являющийся ни центральной симметрией, ни тождественным отображением. Докажите, что если вектор $\vec{a}$ переходит в результате движения r в себя, то $\vec{a} = \vec{0}$.
793. Известно, что $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}|$. Докажите, что при этих условиях справедливы какие-либо два из следующих равенств:

$$\begin{array}{lll} \vec{a} + \vec{b} = \vec{0}, & \vec{a} + \vec{c} = \vec{0}, & \vec{a} + \vec{d} = \vec{0}, \\ \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}, & \vec{b} + \vec{d} = \vec{0}, & \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}. \end{array}$$

К пункту 52

794. Движения f_1, f_2, f_3, f_4 представляют собой параллельные переносы соответственно на векторы $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{DA}$. Что представляет собой движение $f_4 \circ (f_3 \circ (f_2 \circ f_1))$?
795. Взяты три точки A, B, C ; рассматриваются векторы $\vec{p} = \vec{AB}$, $\vec{q} = \vec{BC}$, $\vec{r} = \vec{CA}$. Укажите вектор параллельного переноса $g \circ f$, где f — параллельный перенос на вектор $\vec{p}$, а g — параллельный перенос на вектор $\vec{q}$.

К пункту 53

796. Точка O — центр описанной окружности правильного n -угольника M . Докажите, что сумма векторов, которые изображаются направленными отрезками, идущими из точки O к вершинам многоугольника M , равна $\vec{0}$.
797. Докажите, что если $ABCD$ — параллелограмм, то для любой точки Q справедливо соотношение

$$\vec{QA} + \vec{QC} = \vec{QB} + \vec{QD}.$$

798. Точки $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ — последовательные вершины правильного многоугольника с четным числом сторон. Докажите, что

$$\vec{A_1A_2} + \vec{A_3A_4} + \dots + \vec{A_{2n-1}A_{2n}} = \vec{0}.$$

К пункту 54

799. Докажите, что точки, симметричные точке M относительно середин сторон четырехугольника, являются вершинами параллелограмма или лежат на одной прямой.
800. Докажите, что $\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{b}-\vec{a}$ — противоположные векторы.

К пункту 55

801. Пусть r_1 и r_2 — радиусы двух окружностей, d — расстояние между их центрами. Докажите, что если $d < r_1 - r_2$, то окружности общих точек не имеют.
802. Докажите, что в треугольнике против большего угла лежит большая сторона (ср. задачу 672).
803. В двух окружностях с центрами P и Q проведены не параллельные между собой радиусы $[PA]$ и $[QB]$. Докажите, что (AB) не есть общая касательная этих окружностей.

К пункту 56

804. Для теоремы о том, что средние линии прямоугольника являются его осями симметрии, сформулируйте обратную теорему, противоположную теорему и теорему, противоположную обратной. Докажите эти теоремы.
805. Для следующих теорем составьте обратные, противоположные и противоположные обратным. Для каждой из получающихся теорем либо дайте доказательство, либо приведите контрпример:
- а) $(\forall \text{ пр. } l; \text{ т. } P, Q \in l; \text{ т. } A \notin l, \text{ где } P \neq Q) ((AP) \perp l) \Rightarrow (|AP| < |AQ|)$;
- б) $(\forall l; \text{ т. } O, A, B, C, D, \text{ где } l \text{ — окружность с центром } O \text{ и } A, B, C, D \in l) (|AB| = |CD|) \Rightarrow (d(O, (AB)) = d(O, (CD)))$;
- в) $(\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) (\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow (|\vec{c}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|)$;
- г) $(\forall ABCD) (ABCD \text{ — параллелограмм}) \Rightarrow (|AB| = |CD| \text{ и } (AD) \parallel (BC))$.

806. Докажите, что если прямая, содержащая одну из сторон многоугольника, рассекает этот многоугольник (т. е. он не лежит целиком по одну сторону от рассматриваемой прямой), то многоугольник не является выпуклым.

Сформулируйте для этой теоремы обратную, противоположную теорему и теорему, противоположную обратной.

К пункту 57

807. Укажите наименьшую (по количеству элементов) группу отображений плоскости, содержащую поворот вокруг точки O :
- а) на угол 30° ; б) на угол $\frac{360^\circ}{n}$; в) на угол 50° .

808. Дан вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$. Образуют ли группу отображений параллельные переносы на векторы вида $\vec{p}\vec{a}$, где p : а) произвольное натуральное число; б) произвольное целое число?

К пункту 58

809. Сколько элементов содержит группа самосовмещений правильного n -угольника?
810. а) Докажите, что n -угольник не может иметь больше чем n осей симметрии.
б) Докажите, что если n -угольник имеет n осей симметрии, то он правильный.
в) Докажите, что если группа самосовмещений n -угольника содержит $2n$ элементов, то этот многоугольник правильный.
811. а) Докажите, что если четырехугольник имеет ось симметрии, то она проходит через точку пересечения диагоналей.
б) Докажите, что любое движение, принадлежащее группе самосовмещений четырехугольника F , переводит точку пересечения его диагоналей в себя.
812. а) Через центр описанной окружности равностороннего треугольника проведены две прямые, величина тупого угла между которыми равна 120° . Докажите, что отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника, конгруэнтны.
б) Сформулируйте аналогичное утверждение для правильного n -угольника.
813. а) Окружность l концентрична с описанной окружностью правильного треугольника. Докажите, что части сторон треугольника, заключенные внутри окружности l , конгруэнтны.
б) Сформулируйте аналогичное утверждение для правильного n -угольника.

К пункту 59

814. Докажите, что если f и g — гомотетии с одним и тем же центром, то $g \circ f = f \circ g$. Приведите контрпример к утверждению о том, что композиция любых гомотетий обладает свойством коммутативности.
815. Докажите, что объединение фигур сохраняется при гомотетии, т. е. если g — гомотетия, а F и H — какие-либо фигуры, то $g(F \cup H) = g(F) \cup g(H)$.

К пункту 60

816. В окружности с центром O проведены две хорды $[AB]$ и $[CD]$, пересекающиеся в точке M . Докажите, что для перпендикулярности этих хорд необходимо выполнение условия

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 2\vec{OM}.$$

Является ли это условие достаточным?

817. Дан правильный многоугольник. Найдите такую точку, чтобы сумма векторов, изображаемых направленными отрезками, идущими из этой точки к вершинам многоугольника, была равна $\vec{0}$. Докажите, что такая точка единственна.
818. Даны произвольные точки $A_1, A_2, \dots, A_n$. Докажите, что существует, и притом только одна, точка O , для которой

$$\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \dots + \vec{OA_n} = \vec{0}.$$

819. Докажите, что если $\vec{AC} = m\vec{AB}$, то для любой точки Q справедливо соотношение

$$\vec{QC} = (1 - m)\vec{QA} + m\vec{QB}.$$

К пункту 61

820. Одна из диагоналей трапеции делится точкой пересечения диагоналей на отрезки, длины которых равны 21 мм и 24 мм. Определите длины оснований трапеции, если длина ее средней линии равна 30 мм.
821. Стороны треугольника $A_1B_1C_1$ параллельны сторонам треугольника ABC . Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1$ можно получить из $\triangle ABC$ при помощи гомотетии или параллельного переноса.
822. Отрезки AB и CD — основания трапеции $ABCD$. Отрезок AM получен поворотом отрезка AB на -70° , отрезок CN получен поворотом отрезка CD на -70° . Докажите, что точки M , N и точка пересечения диагоналей трапеции лежат на одной прямой.
823. Впишите в данный остроугольный треугольник ABC квадрат так, чтобы две вершины квадрата принадлежали стороне $[AB]$, а две другие вершины квадрата принадлежали двум другим сторонам треугольника.
824. а) Докажите, что композиция двух гомотетий представляет собой либо гомотетию, либо параллельный перенос.
б) Докажите, что множество H , содержащее все параллельные переносы и все гомотетии, представляет собой группу отображений плоскости.
825. Докажите, что если фигура F симметрична относительно точки Q , а g — гомотетия с центром O , то фигура $g(F)$ симметрична относительно точки $g(Q)$.
826. Даны параллельные прямые a и b . Докажите, что любая точка, не принадлежащая никакой из этих прямых, может быть принята за центр гомотетии прямых a и b .

К пункту 62

827. Дана точка M . Докажите, что точки, симметричные точке M относительно середин сторон треугольника ABC , являются вершинами треугольника, центрально-симметричного треугольнику ABC .

828. Точки M и M_1 — середины отрезков AB и A_1B_1 . Докажите, что середины отрезков AA_1 , BB_1 и MM_1 расположены на одной прямой.
829. Докажите, что если M — середина отрезка AB и $C \in [AB]$, то

$$|CM| = \left| \frac{|AC| - |BC|}{2} \right|.$$

К пункту 63

830. Докажите, что для совпадения центров тяжести треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ необходимо выполнение условия

$$\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{0}.$$

Является ли это условие достаточным?

831. Центры тяжести треугольников ABC , BCD , CDA , DAB являются вершинами параллелограмма. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

К пункту 64

832. Даны два луча l и l_1 с общим началом в точке O и точки $A \in l$, $B \notin (OA)$.
- а) Существует ли движение, переводящее луч l в луч l_1 ? Единственно ли такое движение?
- б) Однозначно ли определено, в какую точку переходит при этом движении точка A ? Точка B ?
833. В тексте п. 58 утверждается, что, кроме e и r , нет других движений, переводящих параллелограмм F в себя (где F — параллелограмм, диагонали которого не конгруэнтны и не перпендикулярны). Докажите это утверждение.
834. Сколько элементов содержит группа самосовмещений ромба, не являющегося квадратом? Квадрата?

К пункту 65

835. Докажите, что любые два полукруга подобны.
836. Круговым сегментом называется пересечение круга с полуплоскостью. В каком случае два круговых сегмента подобны?

К пункту 66

837. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ диагонали $[AD]$ и $[CE]$ пересекаются в точке Q . Докажите, что существует подобие, переводящее $\triangle BCD$ в $\triangle EQD$; определите коэффициент подобия.
838. Какие из следующих высказываний истинны:
- а) если два параллелограмма имеют конгруэнтные острые углы, то они подобны;
- б) если два ромба имеют конгруэнтные острые углы, то они подобны;

- в) если в двух параллелограммах отношение непараллельных сторон одинаково, то они подобны;
 г) если в двух прямоугольниках отношение непараллельных сторон одинаково, то они подобны;
 д) если в двух четырехугольниках все углы соответственно конгруэнтны, то они подобны?

839. Вне прямой a взяты точки C и H , а на прямой a взяты такие точки A , B , M и P , что $(AC) \parallel (PH)$, $(BC) \parallel (MH)$. Определите длины отрезков BC и PH , если $|AB| = 14$, $|PM| = 11$, $|AC| = 15,4$, $|MH| = 8,8$.

К пункту 67

840. Сторона AB треугольника ABC разделена на n конгруэнтных частей и через точки деления проведены прямые, параллельные (BC) . Зная, что площадь треугольника ABC равна S , определите площади частей, на которые разбивается треугольник проведенными прямыми.
841. Параллелограмм разбит отрезком, параллельным стороне, на два параллелограмма, которые подобны между собой и имеют площади 8 и 18. Определите отношение непараллельных сторон исходного параллелограмма.

К пункту 68

842. Докажите, что фигура

$$P = \{M: (|OM| + |MA| = |OA|) \vee (|OA| + |AM| = |OM|)\}$$

есть луч OA .

843. Для каждой из следующих теорем, а также для обратных им теорем либо дайте доказательство, либо приведите контрпример:

а) $(\forall ABCD) (ABCD \text{ — параллелограмм}) \Rightarrow (|AB| = |CD|) \wedge (\widehat{ABD} = \widehat{BDC})$;

б) $(\forall ABCD) (ABCD \text{ — ромб}) \Rightarrow (|AB| = |BC|) \wedge (\widehat{BAC} = \widehat{DAC})$;

в) $(\forall ABCD) (ABCD \text{ — ромб}) \Rightarrow (|AB| = |AD|) \wedge (\widehat{BAC} = \widehat{DAC})$;

г) $(\forall ABCD) (ABCD \text{ — прямоугольник}) \Rightarrow (|AC| = |BD|) \wedge (\widehat{A} = \widehat{C})$.

Все ли высказывания б), в), г) и соответствующие обратные теоремы станут истинными, если разъяснительную часть заменить следующей: $(\forall ABCD$, где $ABCD$ — параллелограмм)?

К пункту 69

844. Убедитесь в справедливости следующих высказываний и отметьте знаком def определение:

а) $(\forall t. A, M, N, \text{ где } A \notin (MN)) (|AM| \text{ — наклонная из т. } A \text{ к } (MN)) \Leftrightarrow (d(A, (MN)) \neq |AM|)$;

- б) $(\forall t. A, M, N, \text{ где } A \notin (MN)) ([AM] \text{—наклонная из т. } A \text{ к } (MN)) \Leftrightarrow (\widehat{AMN} \neq 90^\circ)$;
 в) $(\forall t. A, M, N, \text{ где } A \notin (MN)) ([AM] \text{—наклонная из т. } A \text{ к } (MN)) \Leftrightarrow (\exists \text{ т. } P \in (MN)) (|AP| < |AM|)$.

845. Запишите знаками следующие высказывания и отметьте определение:

- а) для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его противоположные стороны были попарно конгруэнтны;
 б) для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его противоположные углы были попарно конгруэнтны;
 в) для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы он имел центр симметрии;
 г) для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы какие-либо две его стороны были параллельны и конгруэнтны.

К пункту 70

846. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ удовлетворяют условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. Можно ли утверждать, что каждый из них представляется в виде линейной комбинации остальных векторов? Можно ли утверждать, что каждый из них представляется в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$?
847. Какие из следующих высказываний истинны:

- а) $(\forall \vec{a}) (\exists k, l) (\vec{e}_1 = k\vec{a} + l\vec{e}_2)$;
 б) $(\forall \vec{a}) (\exists k, l) (\vec{a} = k\vec{e}_1 + l\vec{e}_2)$;
 в) $(\forall \vec{a}, \vec{b}) (\exists k, l) (\vec{e}_1 = k\vec{a} + l\vec{b})$;
 г) $(\forall \vec{a}, \vec{b}) (\exists k, l) (\vec{a} = k\vec{e}_1 + l\vec{b})$?

К пункту 71

848. Даны точки $A(-3, 8; 4, 2)$ и $B(6, 4; 5)$. Определите координаты точки C , делящей отрезок AB в отношении 3:5 (т. е. $C \in [AB]$ и $|AC| : |CB| = 3:5$).
849. Даны точки $M(-5; -4)$; $P(6; 7)$. Определите координаты точек, делящих отрезок MP на пять конгруэнтных частей.
850. Определите координаты вершин треугольника, зная координаты середин его сторон: $P(3; -2)$, $Q(1; 6)$, $R(-4; 2)$.

К пункту 72

851. Докажите, что для любого y , удовлетворяющего условию $-1 \leq y \leq 1$, существует один и только один угол n° , который удовлетворяет условиям $-90^\circ \leq n^\circ \leq 90^\circ$ и $\sin n^\circ = y$.
852. Докажите справедливость следующих высказываний:

- а) $(\forall k) (\exists n) (\sin n^\circ = k \cos n^\circ)$;
 б) $(\forall k) (\exists n) (\cos n^\circ = k \sin n^\circ)$;
 в) $(\forall x) ((\exists n) (\cos n^\circ = x)) \Rightarrow ((\exists m) (\sin m^\circ = x))$;
 г) $(\forall x) ((\exists n) (\cos n^\circ = x)) \Rightarrow ((\exists m) (\cos m^\circ = -x))$.

К пункту 73

853. Докажите следующие соотношения:

- а) $(\forall n) (\sin (90^\circ + n^\circ) = \cos n^\circ)$;
 б) $(\forall n) (\cos (90^\circ + n^\circ) = -\sin n^\circ)$;
 в) $(\forall n) (\cos (270^\circ - n^\circ) = -\sin n^\circ)$;
 г) $(\forall n) (\sin (270^\circ + n^\circ) = -\cos n^\circ)$.

854. Вектор $\vec{a}_1$ имеет координаты x_1, y_1 , а вектор $\vec{a}_2$ имеет координаты x_2, y_2 . Определите, на какой угол нужно повернуть вектор $\vec{a}_1$, чтобы получить вектор того же направления, что и $\vec{a}_2$:

- а) $|\vec{a}_1| = 3$; $|\vec{a}_2| = 2$; $x_1 = 2,36$; $x_2 = -1,79$; $y_1 > 0$; $y_2 > 0$;
 б) $|\vec{a}_1| = 5$; $|\vec{a}_2| = 5$; $x_1 = 3,72$; $x_2 > 0$; $y_1 < 0$; $y_2 = -4,11$;
 в) $|\vec{a}_1| = 2$; $|\vec{a}_2| = 5$; $x_1 = x_2 = -1,7$; $y_1 > 0$; $y_2 > 0$.

855. Векторы $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$ имеют длины a, b, c . Углы, на которые нужно повернуть $\vec{e}_1$, чтобы получить векторы того же направления, что и $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, равны соответственно n° , m° и p° . Определите координаты вектора $\vec{AD}$.

К пункту 74

856. Справедливы ли следующие высказывания? Справедливы ли теоремы, противоположные указанным:

- а) $(\forall f, g, \text{ где } f, g \text{ — движения}) ((f \text{ сохраняет ориентацию}) \wedge (g \text{ сохраняет ориентацию})) \Rightarrow (g \circ f \text{ сохраняет ориентацию})$;
 б) $(\forall f, g, \text{ где } f, g \text{ — движения}) (g \circ f \text{ сохраняет ориентацию}) \Rightarrow (((f \text{ сохраняет ориентацию}) \wedge (g \text{ сохраняет ориентацию})) \vee ((f \text{ меняет ориентацию}) \wedge (g \text{ меняет ориентацию})))$;
 в) $(\forall f, g, \text{ где } f, g \text{ — движения}) (g \circ f \text{ меняет ориентацию}) \Rightarrow ((f \text{ меняет ориентацию}) \vee (g \text{ меняет ориентацию}))$?

857. Докажите справедливость следующих теорем, предварительно освободившись от знака $\neg$ перед заключением:

- а) $(\forall A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)) (A \text{ и } B \text{ не симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла}) \Rightarrow \neg ((x_1 = y_2) \wedge (x_2 = y_1))$;
 б) $(\forall A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)) (A \text{ и } B \text{ не симметричны относительно оси абсцисс}) \Rightarrow \neg ((x_1 = x_2) \wedge (y_1 = -y_2))$;
 в) $(\forall A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)) (A \text{ и } B \text{ не симметричны относительно оси ординат}) \Rightarrow \neg ((x_1 = -x_2) \wedge (y_1 = y_2))$.

858. Для следующих утверждений составьте противоположную теорему и теорему, противоположную обратной. Решите вопрос об истинности полученных высказываний:

а) $(\forall t. A, B, M, N) ((MN) \text{ — ось симметрии точек } A \text{ и } B) \Rightarrow ((|AM| = |BM|) \wedge (|AN| = |BN|))$;

б) $(\forall ABCD) (ABCD \text{ — параллелограмм}) \Rightarrow ((\widehat{BAC} = \widehat{ACD}) \wedge (\widehat{CAD} = \widehat{ACB}))$;

в) $(\forall ABCD) (ABCD \text{ — трапеция}) \Rightarrow ((\widehat{BAC} = \widehat{ACD}) \vee (\widehat{CAD} = \widehat{ACB}))$;

г) $(\forall \text{пр. } l, m) (l \parallel m) \Rightarrow ((l \cap m = \emptyset) \vee (l = m))$.

К пункту 75

859. При каком расположении векторов выполнено соотношение:

а) $\vec{ab} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$; б) $\vec{ab} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$?

860. Докажите, что если угол A треугольника ABC является прямым, то $(\vec{OA} + \vec{OB})(\vec{OA} + \vec{OC}) = 0$, где O — центр описанной окружности треугольника ABC . Верно ли обратное?

861. Какие из следующих высказываний истинны:

а) $(\forall \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b}, \vec{c}) (\vec{ab} = 0 \wedge \vec{ac} = 0) \Rightarrow (\exists k) (\vec{c} = k\vec{b})$;

б) $(\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) (\vec{ab} = 0 \wedge \vec{ac} = 0) \Rightarrow (\exists k) (\vec{c} = k\vec{b})$;

в) $(\forall \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{c}) (\vec{ab} = 0 \wedge \vec{ac} = 0) \Rightarrow (\exists k) (\vec{c} = k\vec{b})$?

К пункту 76

862. В каком случае $(\vec{ab})\vec{c} = (\vec{bc})\vec{a}$?

863. Докажите, что если $k\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ и $\vec{a} \perp \vec{c}$, то $\vec{b} \perp \vec{c}$.

864. Дан четырехугольник $ABCD$ и взяты векторы $\vec{a} = \vec{AB}$ и $\vec{b} = \vec{AD}$. Докажите, что если $\vec{ap} = \vec{bp}$, где $\vec{p} \neq \vec{0}$, то вектор $\vec{p}$ перпендикулярен одной из диагоналей четырехугольника $ABCD$.

865. Найдите значение выражения $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) - (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$, если $|\vec{b}| = 1$ и вектор $\vec{b}$ ортогонален каждому из векторов $\vec{a}, \vec{c}$.

866. Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ отложены от одной точки: $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$, $\vec{c} = \vec{OC}$. Как расположены точки A, B и C , если существует такой вектор $\vec{p} \neq \vec{0}$, что $\vec{ap} = \vec{bp} = \vec{cp}$?

867. Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ изображаются направленными отрезками по сторонам треугольника: $\vec{a} = \vec{BC}$, $\vec{b} = \vec{CA}$, $\vec{c} = \vec{AB}$. Докажите, что $\vec{ab} + \vec{ac} + \vec{bc} = -\frac{1}{2}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2)$.

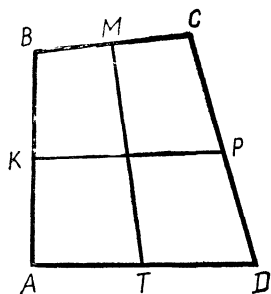


Рис. 407

868. Докажите, что при любом расположении точек A, B, C, D справедливы равенства:

а) $\vec{BC} \cdot \vec{AD} + \vec{CA} \cdot \vec{BD} + \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$;

б) $|\vec{AC}|^2 + |\vec{BD}|^2 = |\vec{AB}|^2 + |\vec{CD}|^2 + 2\vec{BC} \cdot \vec{AD}$.

869. Докажите, что если $ABCD$ — прямоугольник, то для любой точки M справедливо равенство $\vec{MA} \cdot \vec{MC} = \vec{MB} \cdot \vec{MD}$.

870. Докажите, что если $ABCD$ — параллелограмм, то $\vec{BC}^2 + \vec{BC} \cdot \vec{DA} = 0$.

Справедлива ли обратная теорема?

871. Пусть $[KP]$ и $[MT]$ — средние линии четырехугольника $ABCD$ (рис. 407). Докажите, что $|KP|^2 - |MT|^2 = \vec{AC} \cdot \vec{BD}$.

К пункту 77

872. В треугольнике известны длины сторон. Определите: а) длины его медиан; б) сумму квадратов длин медиан.

873. Докажите, что если $ABCD$ — прямоугольник, то для любой точки M справедливо равенство

$$|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2.$$

874. На стороне $[AB]$ квадрата $ABCD$ построен произвольный треугольник ABM . Докажите, что перпендикуляры, проведенные через точку D к прямой MB , через точку C к прямой MA и через точку M к прямой CD , пересекаются в одной точке.

875. Докажите, что точка M в том и только в том случае лежит внутри окружности, имеющей диаметр $[AB]$, если угол AMB тупой или развернутый. Как изменится формулировка для точек, лежащих вне окружности?

876. Докажите, что для перпендикулярности диагоналей четырехугольника достаточно, чтобы его средние линии имели одинаковые длины. Является ли это условие необходимым?

877. Докажите, что для произвольного четырехугольника сумма квадратов длин всех его сторон равна сумме квадратов длин диагоналей, сложенной с учетверенным квадратом длины отрезка, соединяющего середины диагоналей.

878. а) На сторонах параллелограмма (вне его) построены квадраты. Докажите, что центры этих квадратов служат вершинами нового квадрата.

б) На сторонах $[AB]$ и $[BC]$ треугольника ABC построены (вне его) квадраты $ABPQ$ и $BCKL$; точка M — середина отрезка PL . Докажите, что $(BM) \perp (AC)$ и $|BM| = \frac{1}{2} |AC|$.

В обоих случаях найдите два решения: 1) с помощью векторов; и 2) с помощью поворота на 90° вокруг центра одного из квадратов.

К пункту 78

879. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ получаются из вектора $\vec{e}_1$ поворотами на углы m° и n° . Вычислите скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$: а) применяя определение скалярного произведения; б) находя координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Убедитесь с помощью этого вычисления в справедливости формулы

$$\cos(m^\circ - n^\circ) = \cos m^\circ \cos n^\circ + \sin m^\circ \sin n^\circ.$$

880. Вектор $\vec{a}$ получается из вектора $\vec{e}_1$ поворотом на угол n° .

а) Найдите длину вектора $\vec{OM} = \vec{e}_1 + \vec{a}$ и затем вычислите $\vec{e}_1 \cdot \vec{OM}$ с помощью определения скалярного произведения.

б) Вычислите $\vec{e}_1 \cdot \vec{OM}$, находя координаты векторов. Убедитесь с помощью этого вычисления в справедливости формулы

$$\cos \frac{n^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos n^\circ}{2}} \quad \text{при} \quad 0^\circ < n^\circ < 180^\circ.$$

К пункту 79

881. а) Докажите, что прямые $y = kx + b_1$ и $y = -\frac{1}{k}x + b_2$ перпендикулярны.

б) Докажите, что прямые

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

перпендикулярны в том и только в том случае, если $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

882. Две прямые l_1, l_2 , определяемые уравнениями $3x - 4y + 5 = 0$ и $-15x + 8y + 3 = 0$, пересечены прямой m с уравнением $6x + 7y + 8 = 0$. Убедитесь, что величина острого угла между прямыми l_1 и m равна величине острого угла между прямыми l_2 и m . Следует ли отсюда, что $l_1 \parallel l_2$? Сделайте чертеж.

883. Прямые l_1 и l_2 определяются уравнениями $7x - 24y + 8 = 0$ и $10x + 24y - 7 = 0$. Напишите уравнения прямых, на которых расположены биссектрисы углов между l_1 и l_2 .

884. Найдите длины высот треугольника, стороны которого лежат на прямых $y = 0$, $6x - 8y + 11 = 0$ и $5x + 12y + 8 = 0$.

К пункту 80

885. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известны длины всех сторон: $|AB| = 4,1$; $|BC| = 6,3$; $|CD| = 3,2$; $|AD| = 11,2$. Найдите величины углов трапеции.

886. Точка B лежит внутри прямого угла AMK . Найдите расстояние от точки B до луча MA , если ее расстояние от луча MK равно 21 см и $|BM| = 29$ см.
887. На какое расстояние нужно отодвинуть от стены дома нижний конец лестницы длиной 6,5 м, чтобы верхний конец ее достал до карниза, находящегося на высоте 630 см от поверхности земли?
888. Стороны треугольника имеют длины 3, 4, 5. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.
889. Около окружности описана равнобокая трапеция с основаниями 16 см и 36 см. Найдите площадь трапеции.
890. В треугольнике ABC стороны имеют следующие длины: $|AB| = 13$ см, $|BC| = 14$ см, $|AC| = 14$ см. Вычислите длину радиуса окружности, центр которой лежит на стороне $[BC]$ и которая касается двух других сторон.
891. Подобие f переводит точку A в точку B , точку B — в точку C , а точку O — в себя. Определите $|OC|$, зная, что $|OA| = 169$, $|BC| = 60$ и $(AB) \perp (OB)$.
892. Прямая AC служит осью симметрии четырехугольника $ABCD$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот четырехугольник, если известно, что:
 а) $|AB| = 3$ см; $|BC| = 7$ см; $(AB) \perp (BC)$;
 б) $|AB| = 5,2$ см; $|BC| = 3,8$ см; $\widehat{ABC} = 150^\circ$.
 В обоих случаях постройте четырехугольник $ABCD$ и вписанную в него окружность.
893. На гипотенузе $[AB]$ прямоугольного треугольника ABC построен вне его прямоугольный треугольник ABD с прямым углом в точке B , причем $\widehat{BAD} = \widehat{BAC}$. Определите длину гипотенузы $[AD]$, если $|AB| = 24$, $|AC| = 18$.
894. В треугольнике ABC дано $|BC| = 15$, $|AC| = 12$. Найдите длину высоты, проведенной из вершины B , если длина высоты, проведенной из вершины A , равна 8.

К пункту 81

895. В окружности проведены радиусы $[OA]$ и $[OB]$. Определите длину радиуса, если $|AB| = a$ и $\widehat{AOB} = n^\circ$.
896. В окружность вписан треугольник ABC . Докажите, что длина радиуса окружности равна $\frac{|AB|}{2 \sin \hat{C}}$.
897. Докажите, что для любого треугольника справедлива формула $abc = 4RS$, где a, b, c — длины сторон, R — радиус описанной окружности, S — площадь.
898. Докажите справедливость формулы

$$S = 2R^2 \sin \hat{A} \sin \hat{B} \sin \hat{C},$$

где R — радиус описанной окружности треугольника ABC , а S — его площадь.

К пункту 82

899. Докажите, что в произвольном треугольнике ABC имеет место соотношение $a = b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B}$.
900. На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка M . Докажите, что $|AM| \cdot |BM| = |BC|^2 - |CM|^2$.

ЗАДАЧИ С ПРАКТИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

901. Из металлического прута нужно согнуть треугольник, одна сторона которого имела бы длину 170 мм. Какой должна быть длина прута, чтобы это можно было сделать? Изменится ли ответ, если дополнительно потребовать, чтобы изготовленный треугольник был остроугольным?
902. Складной метр состоит из семи деревянных планок одинаковой длины, концы которых последовательно скреплены шарнирами. Можно ли, поворачивая планки, получить контур треугольника? Остроугольного треугольника? Тупоугольного треугольника? При каком наименьшем числе шарнирно скрепленных одинаковых планок можно получить прямоугольный треугольник?
903. На прямоугольном бильярде $ABCD$ расположены два шара M и N . В каком направлении надо толкнуть шар M , чтобы он, отразившись от борта AB , попал в шар N ? В каком направлении нужно толкнуть шар M , чтобы он попал в шар N , отразившись от двух бортов AB и BC ? Последовательно отразившись от всех четырех бортов? (После отражения от борта шар движется так, что угол падения конгруэнтен углу отражения.)
904. Ферма расположена вблизи круглого пруда. Где выбрать на берегу площадку для насоса, чтобы длина трубы, соединяющей насос с фермой, была наименьшей?
905. Три села A , B и C не лежат на одной прямой. Каким образом нужно провести прямую дорогу через село A , чтобы B и C были на одинаковом расстоянии от нее?
906. Докажите, что если зеркало в половину человеческого роста висит отвесно, то в нем можно видеть себя во весь рост. На какой высоте должно висеть зеркало?
907. Расстояние от Солнца до Луны составляет 150 млн км; диаметр Солнца больше диаметра Луны в 404 раза. Вычислите длину тени, отбрасываемой Луной.
908. Высота водонапорной башни 20 м. Ученик, длина руки которого составляет 50 см, заметил, что спичечный коробок, который он держит вертикально в вытянутой вперед руке, как раз закрывает башню от его зрения. На каком расстоянии от башни находится ученик?

909. Измерьте расстояние от вашего глаза до линейки, находящейся в вытянутой руке. Напишите формулу, с помощью которой вы можете, имея линейку с миллиметровыми делениями, определять расстояние до вертикально стоящего предмета, высота которого известна. Можно ли воспользоваться этой формулой, чтобы, имея рулетку, найти высоту дерева?
910. Плитка имеет форму правильного шестиугольника с длиной стороны 8,6 см. Сколько потребуется таких плиток, чтобы выстлать пол кухни размерами $3,8 \times 2,5$ м?
911. Сечение канавы должно иметь форму трапеции, причем ширина канавы (по верху) должна составить 1 м, глубина канавы 0,5 м, а площадь поперечного сечения $0,4 \text{ м}^2$. Какую ширину должна иметь канавка у дна?
912. Фермы A и B расположены по разные стороны реки, берега которой вблизи ферм прямолинейны и параллельны. В каком месте следует построить мост через реку (мост должен быть перпендикулярен берегам), чтобы дорога, соединяющая фермы, была кратчайшей? Каково будет решение, если фермы разделены двумя реками?
913. Собственная скорость лодки 5,4 км/ч, направлена она под углом 70° к направлению течения реки; скорость течения реки 20 м/мин. Найдите графически величину и направление скорости лодки относительно берега.
914. Лодка движется относительно берега под углом 75° со скоростью 5,4 км/ч. Течение реки (параллельное берегу) имеет скорость 1,8 км/ч. Найдите графически собственную скорость лодки.
915. Пришкольный участок имеет форму неправильного четырехугольника. Он снят на план в масштабе $1 : 5000$. Каким образом, используя гомотегию, начертить на кальке план этого участка в масштабе $1 : 15000$?
916. На географической карте три пункта удалены один от другого на 7 см, 6 см, и 5,5 см. На местности наибольшее из этих расстояний составляет 15 км. Чему равно наименьшее расстояние?
917. Две дороги идут по сторонам острого угла CAD , внутри которого имеется пункт B . Пункт A окружен лесом. Каким образом на местности наметить трассу прямолинейного участка узкоколейки, который должен соединить пункты A и B ?
918. Чтобы измерить расстояние между предметами A и B , расположенными на противоположных берегах озера, провешивают (по компасу) отрезок CD , параллельный AB . Затем на прямой AC находят точку K , из которой B и D видны на одной прямой. Составьте формулу для вычисления расстояния $|AB|$, если $|CD|=a$, $|KC|=b$, $|AK|=c$.
919. Какого диаметра надо взять бревно, чтобы из него можно было выпилить брус, имеющий квадратное сечение площадью $3,2 \text{ дм}^2$?
920. Деревянная балка имеет наибольшую прочность, если ее сечением служит такой прямоугольник, что перпендикуляры,

проведенные из вершин к диагонали, делят эту диагональ на три конгруэнтные части. Определите размеры балки наибольшей прочности, которую можно выпилить из бревна, имеющего диаметр 3,5 дм.

921. Лестница длиной 6 м одним концом прислонена к вертикальной стене, а другой ее конец удален от стены на 1 м. На сколько понизится верхний конец лестницы, если основание удалить от стены еще на 0,5 м?
922. В точке A турист установил с помощью компаса, что азимут направления его движения (т. е. угол между направлением на север и направлением движения) равен 65° , а азимут направления на вершину горы B равен 25° . Полчаса турист шел в прежнем направлении со скоростью 5 км/ч, после чего снова замерил азимут направления на гору; он оказался равным 20° . Определите расстояние между точками A и B .
923. (Задача Л. Н. Толстого.) Камыш торчит из воды. Как определить глубину в этом месте, подъехав к камышу на лодке, не вырывая его и не измеряя глубину реки?
924. Учитывая, что телевизионные передачи осуществляются на расстоянии прямой видимости, установите, как далеко принимаются передачи Московского телецентра, если передающая антенна имеет высоту 500 м. (Радиус Земли можно принять равным 6500 км.)
925. Спутник летит по круговой орбите на высоте 220 км над поверхностью Земли, совершая один оборот за 90 мин. Сколько времени его можно видеть из одного пункта наблюдения?
926. Самолет летит с постоянной скоростью v в горизонтальном направлении. Определите высоту его полета, если в некоторый момент с него наблюдают неподвижный предмет под углом m° к вертикали, а спустя t с наблюдают тот же предмет под углом n° . (Предмет находится непосредственно под трассой полета.)

КОСИНУСЫ

	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	0,1°	0,2°	0,3°	0,4°	0,5°	0,6°	0,7°	0,8°	0,9°
0°	1,000	1,000	,999	,999	,998	,996	,994	,992	,990	,988	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10°	0,985	,982	,978	,974	,970	,966	,961	,956	,951	,946	0	1	1	1	1	1	1	1	1
20°	0,940	,934	,927	,920	,913	,906	,899	,891	,883	,875	1	1	2	2	3	4	4	5	5
30°	0,866	,857	,848	,839	,829	,819	,809	,799	,788	,777	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40°	0,766	,755	,743	,731	,719	,707	,695	,682	,669	,656	1	2	4	5	6	7	8	10	11
50°	0,643	,629	,616	,602	,588	,574	,559	,545	,530	,515	2	3	4	6	7	9	10	12	13
60°	0,500	,485	,470	,454	,438	,423	,407	,391	,375	,358	2	3	5	7	8	10	11	13	14
70°	0,342	,326	,309	,292	,276	,259	,242	,225	,208	,191	2	4	5	7	9	10	12	14	15
80°	0,174	,156	,139	,122	,104	,087	,070	,052	,035	,018	2	4	5	7	9	10	12	14	15
90°	0,000																		

СИНУСЫ

	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	0,1°	0,2°	0,3°	0,4°	0,5°	0,6°	0,7°	0,8°	0,9°
0°	0,000	0,018	,035	,052	,070	,087	,104	,122	,139	,156	2	4	5	7	9	11	12	14	16
10°	0,174	,191	,208	,225	,242	,259	,276	,292	,309	,326	2	3	5	7	8	10	12	13	15
20°	0,342	,358	,375	,391	,407	,423	,438	,454	,470	,485	1	3	5	6	8	9	11	13	14
30°	0,500	,515	,530	,545	,559	,574	,588	,602	,616	,629	1	3	4	6	7	8	10	11	13
40°	0,643	,656	,669	,682	,695	,707	,719	,731	,743	,755	1	3	4	5	6	8	9	10	11
50°	0,766	,777	,788	,799	,809	,819	,829	,839	,848	,857	1	2	3	4	5	6	7	8	9
60°	0,866	,875	,883	,891	,899	,906					1	2	2	3	4	5	6	7	
							,914	,920	,927	,933	1	1	2	3	3	4	5	5	6
70°	0,940	,946	,951	,956	,961						1	1	2	2	3	3	4	4	5
						,966	,970	,974	,978	,981	0	1	1	2	2	3	3	3	3
80°	0,985	,988	,990	,992	,994	,996					0	1	1	1	1	2	2	2	2
							,998	,999	,999	1,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
90°	1,000																		

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
-----------------------	---

6 класс

Глава I. Фигуры и движения	5
1. Характеристическое свойство окружности	—
2. Пересечение фигуры с окружностью	7
3. Внутренняя и внешняя области окружности	9
4. Граница области	11
5. Неравенство треугольника	14
6. Движения	17
7. Свойства движений	20
Глава II. Осевая симметрия	23
8. Построение симметричных фигур	—
9. Применение осевой симметрии к решению задач	26
10. Понятие о теореме	27
11. Перпендикуляр и наклонная	29
12. Расстояние от точки до фигуры	31
13. Касательная к окружности	34
14. Свойство биссектрисы угла	36
15. Задачи на построение	38
16. Знак общности	40
17. Структура теоремы	42
Глава III. Центральная симметрия	44
18. Поворот	—
19. Параллельность центрально-симметричных прямых	47
20. Накрест лежащие углы	49
21. Обратная теорема	51
22. Признак параллельности двух прямых	52
23. Сумма величин углов выпуклого многоугольника	54
24. Параллелограмм	57
25. Свойства параллелограмма	59
26. Признаки параллелограмма	60
27. Необходимые и достаточные условия	63
28. Ромб	65
29. Прямоугольник. Квадрат	67

7 класс

Глава IV. Измерение длин	70
30. Предикат	—
31. Знак существования	72
32. Средняя линия треугольника	74
33. Средняя линия трапеции	76

34. Измерение длины отрезка	79
35. Действия с длинами отрезков	82
36. Отношение длин отрезков	84
37. Теорема о пересечении двух прямых параллельными прямыми	86
38. Следствие из теоремы о пересечении двух прямых параллельными	88
39. Измерение величин вписанных углов	91
Глава V. Измерение площадей	94
40. Отрицание	—
41. Контрпример	97
42. Измерение площади фигуры	100
43. Действия с площадями фигур	103
44. Формула площади параллелограмма	105
45. Формула площади треугольника	108
46. Формула площади трапеции	111
47. Площадь произвольного многоугольника	113
Глава VI. Векторы и параллельный перенос	116
48. Композиция движений	—
49. Свойства композиции движений	119
50. Вектор	121
51. Сумма векторов	125
52. Композиция параллельных переносов	129
53. Свойства суммы векторов	133
54. Сходство в действиях над векторами и числами	136
55. Доказательство от противного	139
56. Противоположная теорема	141
57. Группа отображений плоскости	143
58. Группа самосовмещений фигуры	146
Глава VII. Гомотетия и подобие	149
59. Гомотетия	—
60. Свойства произведения вектора на число	152
61. Свойства гомотетии	154
62. Применение векторов к решению задач	157
63. Центр тяжести треугольника	160
64. Отображения, сохраняющие и меняющие ориентацию	162
65. Подобие	166
66. Подобие как композиция гомотетии и движения	169
67. Отношение площадей подобных фигур	171

8 класс

Глава VIII. Координаты векторов	174
68. Логические союзы «и», «или»	—
69. Определение	177
70. Линейная комбинация векторов	179
71. Координатная запись действий над векторами	183
72. Косинус и синус	186
73. Формулы приведения	189
74. Отрицание в теоремах и определениях	192

Глава IX. Скалярное произведение векторов	195
75. Определение скалярного произведения . . .	—
76. Свойства скалярного произведения	198
77. Применение скалярного произведения к решению задач	201
78. Вычисление скалярного произведения в координатах	203
79. Вектор, перпендикулярный прямой	205
80. Теорема косинусов	208
81. Теорема синусов	211
82. Решение треугольников	213
Глава X. Понятие об аксиоматическом методе	216
83. Аксиомы Евклида	—
84. Противоречивость	219
85. Непротиворечивость и понятие модели . . .	221
86. Н. И. Лобачевский и его геометрия	223
87. Завершение аксиоматизации геометрии . . .	226
88. Понятие метрического пространства	229
89. Эрлангенская программа Ф. Клейна	232
Дополнительные задачи	234
Задачи с практическим содержанием	265
Приложения (косинусы и синусы)	268

ВЛАДИМИР ГРИГОРЬЕВИЧ БОЛТЯНСКИЙ
МАРК БЕНЦИАНОВИЧ ВОЛОВИЧ

АЛЕКСЕЙ ДМИТРИЕВИЧ СЕМУШИН

ГЕОМЕТРИЯ

Пробный учебник для 6—8 классов

ИБ № 4153

Редактор *Ж. П. Данилова*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технические редакторы *С. А. Птицына*
и *И. В. Квасницкая*
Корректоры *Л. П. Михеева, В. Г. Соловьева*

Сдано в набор 28.09.78. Подписано к печати 7.09.79.
60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 2. Литер. гарн. Печать высокая.
Усл. печ. л. 17. Уч.-изд. л. 15,44. Тираж 35 000 экз.
Заказ 7792. Цена 30 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство
«Просвещение» Государственного комитета РСФСР по
делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, 3-й проезд Марьиной роши, 41.

Отпечатано с матриц ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени Первой Образ-
цовой типографии им. А. А. Жданова в областной типо-
графии управления издательств, полиграфии и книжной
торговли Ивановского облисполкома, 153628, г. Ива-
ново, ул. Типографская, 6.

30 коп.

